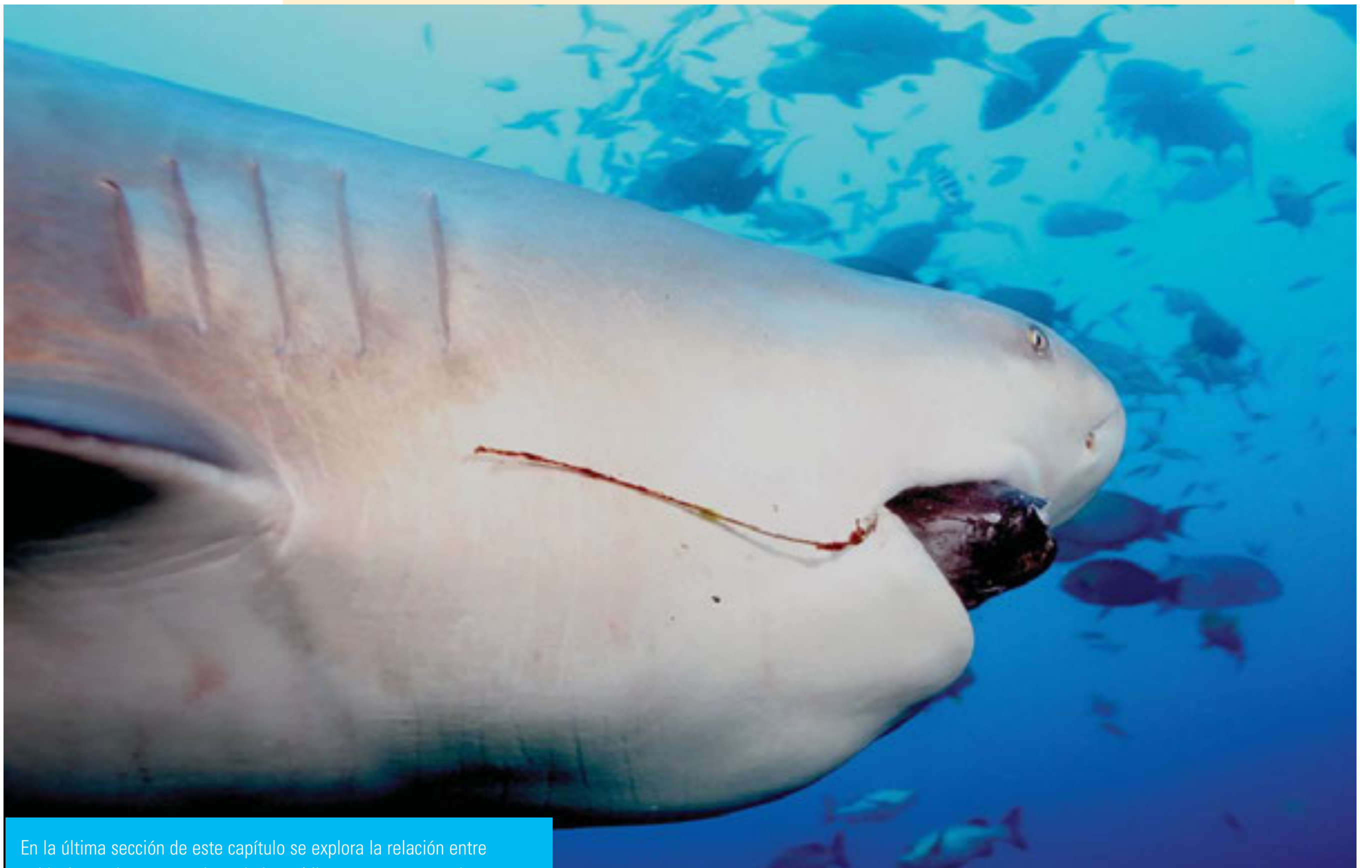
9 Ecuaciones diferenciales



En la última sección de este capítulo se explora la relación entre poblaciones de presas y depredadores (tiburones y peces, pulgones y mariquitas, lobos y conejos) mediante pares de ecuaciones diferenciales.

© Ciurzynski / Shutterstock

Tal vez la más importante de todas las aplicaciones del cálculo está en las ecuaciones diferenciales. Cuando los físicos o los científicos que se ocupan de las ciencias sociales utilizan el cálculo, con frecuencia lo hacen para analizar una ecuación diferencial que ha aparecido en el proceso de modelado de algún fenómeno que están estudiando. Aun cuando a veces es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, veremos que hay métodos gráficos y numéricos que aportan la información necesaria.

9.1 Modelado con ecuaciones diferenciales

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) la discusión de un modelo matemático en la página 24.

Al describir el proceso de modelado en la sección 1.2, se habló acerca de la formulación de un modelo matemático de un problema del mundo real, ya sea por razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física en función de la evidencia experimental. El modelo matemático con frecuencia toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es sorprendente, porque en el problema del mundo real, es común observar que ocurran cambios y se desea predecir el comportamiento futuro respecto a cómo cambian los valores actuales. Comenzamos por examinar varios ejemplos de cómo surgen las ecuaciones diferenciales cuando se modelan fenómenos físicos.

Modelos de crecimiento poblacional

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en asumir que la población crece en una cantidad proporcional al tamaño de la población. Ésa es una suposición razonable para una población de bacterias o animales en condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad a enfermedad).

Identifiquemos y denotemos las variables en este modelo:

t = tiempo (la variable independiente)

P = número de individuos en la población (la variable dependiente)

La rapidez de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Así que la suposición de que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población, se escribe como la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es nuestro primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Una vez formulado un modelo, se consideran sus consecuencias. Si se descarta una población de 0, entonces $P(t) > 0$ para toda t. Así, si $k > 0$, entonces la ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población siempre está creciendo. De hecho, cuando crece $P(t)$ la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento se incrementa cuando crece la población.

Tratemos de pensar en una solución para la ecuación 1. La ecuación nos pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí misma. Sabemos del capítulo 3 que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si establecemos $P(t) = Ce^{kt}$, entonces

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Así, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. En la sección 9.4 veremos que no hay otra solución.

Si C es un número real, se obtiene la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Pero las poblaciones tienen sólo valores positivos y, por lo tanto, se está interesado sólo en soluciones con $C > 0$. Y probablemente se tiene interés

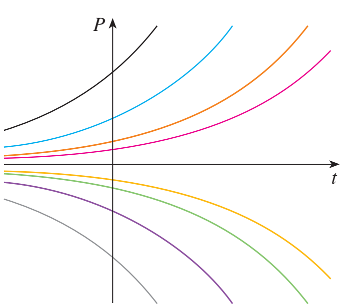


FIGURA 1
La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

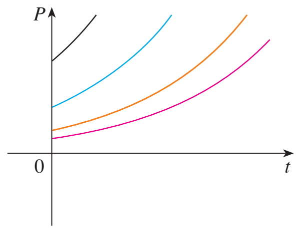


FIGURA 2
La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

sólo en valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$. En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Si se escribe $t = 0$, se obtiene $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La ecuación 1 es apropiada para modelar el crecimiento poblacional en condiciones ideales, pero se tiene que reconocer que un modelo más real debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. Muchas poblaciones comienzan incrementándose de manera exponencial, pero la población se estabiliza cuando se aproxima a su *capacidad de soporte* M (o disminuye hacia M si alguna vez excede a M). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, se hacen dos suposiciones:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional)
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > M$ (P disminuye si nunca excede a M)

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones es la siguiente ecuación

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Observe que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M se aproxima a 0 y, por lo tanto, $dP/dt \approx kP$. Si $P > M$, entonces $1 - P/M$ es negativa y, por tanto, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística*, y la propuso el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst en la década de 1840 como un modelo para el crecimiento poblacional mundial. En la sección 9.4 se desarrollarán técnicas que permiten hallar soluciones explícitas de la ecuación logística, pero por ahora se pueden deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. Primero observaremos que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = M$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los factores del lado derecho de la ecuación 2 es cero. (Esto sin duda tiene sentido físico: si la población es alguna vez 0 o está a la capacidad de soporte, permanece así.) Estas dos soluciones constantes se llaman *soluciones de equilibrio*.

Si la población inicial $P(0)$ está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación 2 es positivo, por lo tanto $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población rebasa la capacidad de soporte ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, así que $dP/dt < 0$ y la población decrece. Observe que, en cualquier caso, si la población tiende a la capacidad de soporte ($P \to M$), entonces $dP/dt \to 0$, lo que significa que la población se estabiliza. Así que se espera que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se parecen a las de la figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = M$.

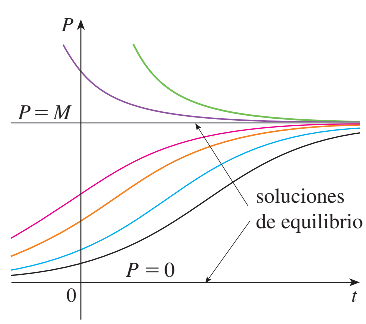


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

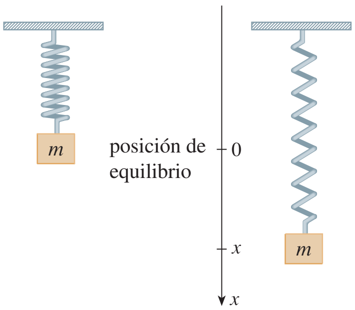


FIGURA 4

Modelo para el movimiento de un resorte

Ahora se examina un ejemplo de un modelo de las ciencias físicas. Consideraremos el movimiento de un objeto con masa m sujeto en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke que establece que si un resorte se estira (o comprime) x unidades desde su longitud natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{Fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si se ignoran las fuerzas de resistencia externas (debidas a la resistencia del aire o la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), se tiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Éste es un ejemplo de lo que se llama una *ecuación diferencial de segundo orden* porque involucra segundas derivadas. Veamos qué se puede conjeturar acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Podemos reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo opuesto. Se conocen dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 pueden escribirse como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (véase el ejercicio 4). Esto no es sorprendente; se espera que el resorte oscile respecto a su posición de equilibrio y, por tanto, es natural pensar que están involucradas las funciones trigonométricas.

Ecuaciones diferenciales generales

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de la ecuación diferencial es el de la mayor de las derivadas que aparecen en la ecuación. Así, las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden, y la ecuación 3 es de segundo. En las tres ecuaciones, la variable independiente se llama t y representa el tiempo, pero en general la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando se considera la ecuación diferencial

$$y' = xy \tag{4}$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Así, f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se pide *resolver* una ecuación diferencial, se espera hallar las posibles soluciones de la ecuación. Ya se han resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente simples, a saber, aquellas de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, sabemos que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es una tarea fácil. No hay técnica sistemática que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en la sección 9.2 se verá cómo dibujar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no se tiene fórmula explícita. También se aprenderá cómo hallar aproximaciones numéricas a soluciones.

V EJEMPLO 1 Demuestre que cualquier miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Utilizamos la regla del cociente para derivar la expresión para y:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

En la figura 5 se muestran las gráficas de siete miembros de la familia del ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, entonces $y' \approx 0$. Esto se confirma por lo alisado de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

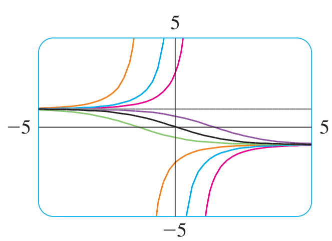


FIGURA 5

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(y^2 - 1) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

Al aplicar ecuaciones diferenciales, normalmente no se está tan interesado en hallar una familia de soluciones (la *solución general*) como en determinar una solución que satisfaga algún requerimiento adicional. En muchos problemas físicos se requiere hallar la solución particular que satisface una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Ésta se llama **condición inicial**, y el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se llama **problema con valores iniciales**.

Desde el punto de vista geométrico, cuando se impone una condición inicial, buscamos en la familia de curvas solución una que pase por el punto (t_0, y_0). Físicamente, esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema con valor inicial para predecir el futuro comportamiento del sistema.

V EJEMPLO 2 Encuentre una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$

9.1 Ejercicios

1. Demuestre que $y = \frac{2}{3}e^x + e^{-2x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 2y = 2e^x$.

2. Compruebe que $y = -t\cos t - t$ es una solución del problema con valores iniciales

$$t\frac{dy}{dt} = y + t^2 \operatorname{sen} t \qquad y(\pi) = 0$$

3. a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?
b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que encontró en el inciso a), demuestre que todo integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1x} + be^{r_2x}$ también es una solución.

4. a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?
b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B\cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?
a) $y = \operatorname{sen} x$ b) $y = \cos x$
c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ d) $y = -\frac{1}{2}x\cos x$

6. a) Demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
b) Ilustre el inciso a) graficando diferentes miembros de la familia de soluciones en una pantalla común.
c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(1) = 2$.
d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

7. a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ con sólo observar la ecuación diferencial?
b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso a).
c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso b)?
d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?
b) Compruebe que todos los miembros de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.
c) Grafique varios miembros de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso a)?
d) Encuentre una solución del problema con valores iniciales.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se modela mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

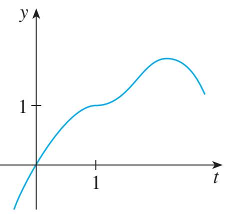
a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?

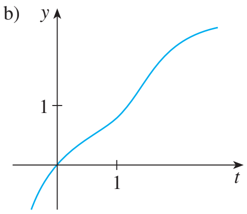
Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

b) ¿Para qué valores de y es y creciente?
c) ¿Para qué valores de y es y decreciente?

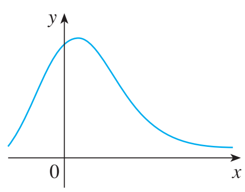
11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$$

a)


b)


12. La función de la gráfica dada es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.

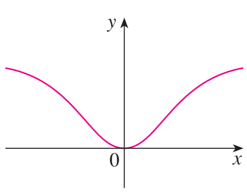


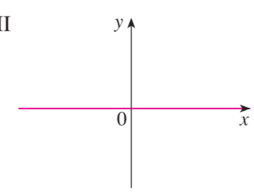
A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

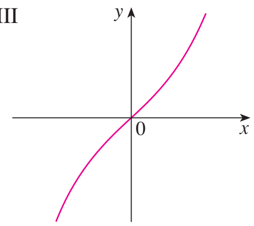
13. Relacione las siguientes ecuaciones diferenciales con las gráficas solución I-IV. Argumente sus elecciones.

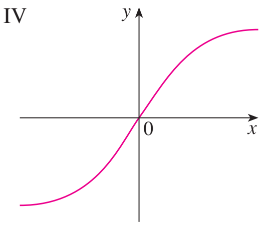
a) $y' = 1 + x^2 + y^2$ b) $y' = xe^{-x^2-y^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{1 + e^{x^2+y^2}}$ d) $y' = \operatorname{sen}(xy)\cos(xy)$

I


II


III


IV


14. Suponga que se sirve una taza de café recién preparado con temperatura de 95 °C en una habitación donde la temperatura es de 20 °C.

a) ¿Cuándo considera que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué sucede con la rapidez de enfriamiento a medida que pasa el tiempo? Explique.
b) La ley de Newton del enfriamiento establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio ambiente, siempre que esta diferencia no sea muy grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de Newton del enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso a), ¿considera que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?
c) Elabore un bosquejo aproximado de la gráfica de la solución del problema con valores iniciales del inciso b).

15. Los psicólogos interesados en teoría de aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño.

a) ¿Cuándo considera que P se incrementa con más rapidez? ¿Qué sucede con dP/dt cuando t crece? Explique.
b) Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ es una constante positiva}$$

es un modelo razonable para el aprendizaje.
c) Proponga un bosquejo aproximado de una posible solución de esta ecuación diferencial.

9.2 Campos direccionales y método de Euler

Desafortunadamente, es imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales en términos de una fórmula explícita para la solución. En esta sección se muestra que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, aún se puede aprender mucho acerca de la solución por un método gráfico (campos direccionales) o método numérico (método de Euler).

Campos direccionales

Suponga que se le pide bosquejar la gráfica de la solución del problema con valores iniciales

$$y' = x + y \qquad\qquad y(0) = 1$$

No se conoce una fórmula para la solución, así que ¿cómo puede bosquejar su gráfica? Considere lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ indica que la pendiente en cualquier punto (x, y) sobre la gráfica (llamada *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (véase figura 1). En particular, debido a que la curva pasa por el punto (0, 1), su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Así, una pequeña porción de la curva solución cerca del punto (0, 1) tiene la apariencia de un corto segmento de recta que pasa por (0, 1) con pendiente 1 (véase figura 2).

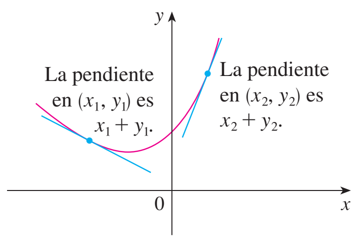


FIGURA 1
La solución de $y' = x + y$

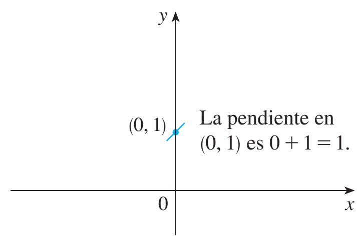


FIGURA 2
Comienzo de la curva solución que pasa por (0, 1)

Como una guía para bosquejar el resto de la curva, se dibujan cortos segmentos de recta en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se llama *campo direccional* y se muestra en la figura 3. Por ejemplo, el segmento de recta en el punto (1, 2) tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional permite ver la forma general de las curvas solución indicando la dirección en que proceden las curvas en cada punto.

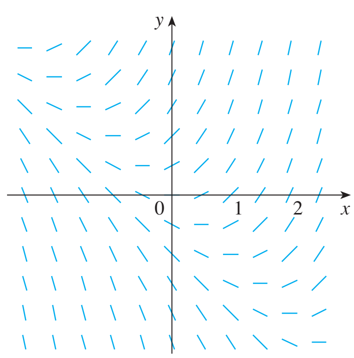


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

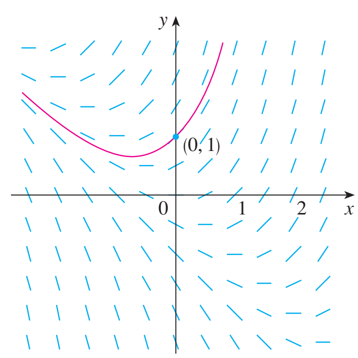


FIGURA 4
Curva solución a través de (0, 1)

Ahora se puede bosquejar la curva solución a través del punto (0, 1) siguiendo el campo direccional como en la figura 4. Observe que se ha dibujado la curva para que sea paralela a segmentos de recta cercanos.

En general, suponga que se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = F(x, y)$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. La ecuación diferencial dice que la pendiente de una curva solución en un punto (x, y) sobre la curva es $F(x, y)$. Si se dibujan segmentos cortos de recta con pendiente $F(x, y)$ en varios puntos (x, y), el resultado se llama **campo direccional** (o **campo de pendientes**). Estos segmentos de recta indican la dirección en que apunta una curva solución, así que el campo direccional ayuda a ver la forma general de estas curvas.

V EJEMPLO 1

a) Bosqueje el campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

b) Use el inciso a) para bosquejar la curva solución que pasa por el origen.

SOLUCIÓN

a) Se empieza por calcular la pendiente en varios puntos en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

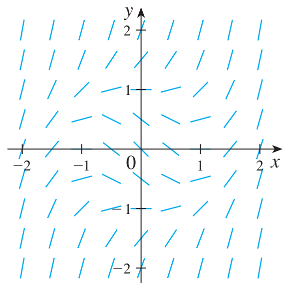


FIGURA 5

Ahora se dibujan cortos segmentos de recta con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional de la figura 5.

b) Empezamos en el origen y nos movemos a la derecha en la dirección del segmento de recta (cuya pendiente es -1). Continuamos con el trazo de la curva solución de modo que se mueva paralela a los segmentos de recta cercanos. La curva solución resultante se muestra en la figura 6. Volviendo al origen, se dibuja también la curva solución a la izquierda.

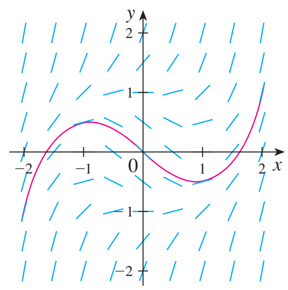


FIGURA 6

Mientras más segmentos de recta se dibujen en un campo direccional, más clara se vuelve la ilustración. Por supuesto, es tedioso calcular pendientes y dibujar segmentos de recta para un enorme número de puntos a mano, pero las calculadoras son muy adecuadas para esta tarea. En la figura 7 se muestra un campo direccional más detallado dibujado por computadora para la ecuación diferencial del ejemplo 1. Permite dibujar, con razonable exactitud, las curvas solución mostradas en la figura 8 con intersecciones en y, -2, -1, 0, 1 y 2.

TEC Module 9.2A muestra campos direccionales y las curvas solución para varias ecuaciones diferenciales.

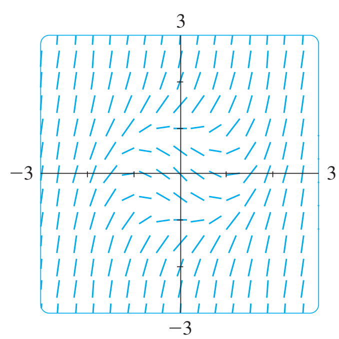


FIGURA 7

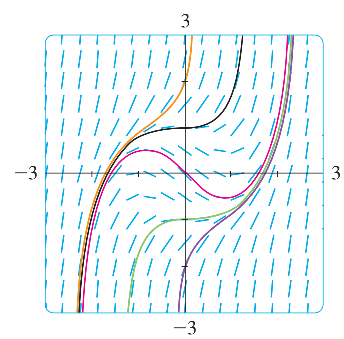


FIGURA 8

Ahora veremos cómo los campos direccionales dan una idea de las situaciones físicas. El circuito eléctrico simple mostrado en la figura 9 contiene una fuerza electromotriz (por lo común una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henrios (H).

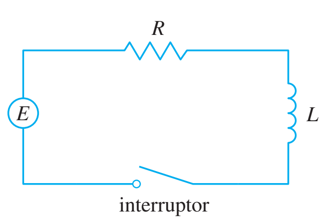


FIGURA 9

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \boxed{1}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que modela la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 2 Considere que en el circuito simple de la figura 9 la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H y la batería da un voltaje constante de 60 V.

a) Dibuje un campo direccional para la ecuación 1 con estos valores.
b) ¿Qué se puede decir acerca del valor límite de la corriente?
c) Identifique las soluciones de equilibrio.
d) Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

SOLUCIÓN

a) Si hacemos $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 1, obtenemos

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

El campo direccional para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 10.

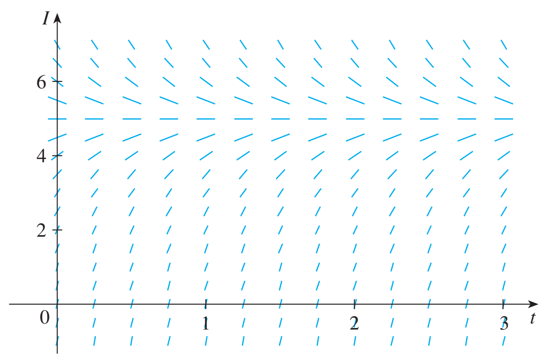


FIGURA 10

b) Del campo direccional se ve que las soluciones se aproximan al valor 5 A, es decir,

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 5$$

c) En la función constante $I(t) = 5$ se ve que es una solución de equilibrio. De hecho, esto se puede comprobar de manera directa a partir de la ecuación diferencial $dI/dt = 15 - 3I$. Si $I(t) = 5$, entonces el lado izquierdo es $dI/dt = 0$ y el lado derecho es $15 - 3(5) = 0$.

d) Usamos el campo direccional para bosquejar la curva solución que pasa por (0, 0), como se muestra en color rojo en la figura 11.

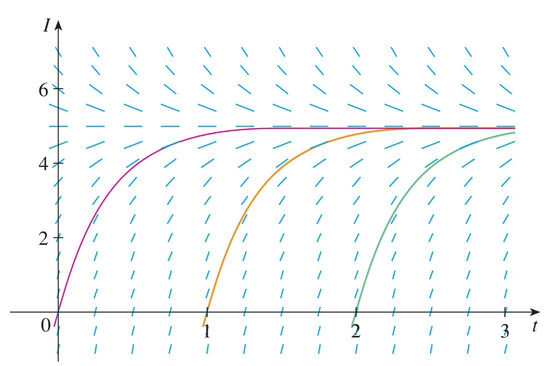


FIGURA 11

Observe en la figura 10 que los segmentos de recta a lo largo de cualquier recta horizontal son paralelos. Eso es porque la variable independiente t no aparece del lado derecho de la ecuación $I' = 15 - 3I$. En general, una ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que falta la variable independiente en el lado derecho, se llama **autónoma**. Para tal ecuación, las pendientes correspondientes a dos puntos distintos con la misma coordenada y deben ser iguales. Esto significa que si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, entonces se puede obtener infinitamente muchas otras desplazando sólo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda. En la figura 11 se han mostrado las soluciones que resultan de desplazar la curva solución del ejemplo 2 una o dos unidades de tiempo (a saber, segundos) a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor cuando $t = 1$ o $t = 2$.

Método de Euler

La idea básica detrás de los campos direccionales se puede usar para hallar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales. Se ilustra el método en el problema con valor inicial que se empleó para introducir campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad\qquad y(0) = 1$$

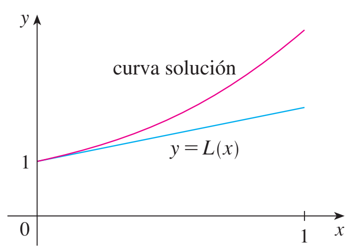


FIGURA 12
Primera aproximación de Euler

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, así que la curva solución en el punto (0, 1) tiene pendiente 1. Como una primera aproximación a la solución se podría usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, se podría usar la recta tangente en (0, 1) como aproximación a la curva solución (véase figura 12).

La idea de Euler era mejorar esta aproximación procediendo sólo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente y luego hacer una corrección a mitad de curso cambiando la dirección como indica el campo direccional. En la figura 13 se muestra lo que sucede si se comienza a lo largo de la recta tangente pero se detiene cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se llama *tamaño de paso*.) Puesto que $L(0.5) \approx 1.5$, se tiene $y(0.5) \approx 1.5$ y se toma (0.5, 1.5) como el punto de partida para un nuevo segmento de recta. La ecuación diferencial indica que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, de modo que se usa la función lineal

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

como una aproximación a la solución para $x > 0.5$ (el segmento verde en la figura 13). Si se reduce el tamaño de paso de 0.5 a 0.25, se obtiene una mejor aproximación de Euler mostrada en la figura 14.

Euler

Leonhard Euler (1707-1783) fue el principal matemático de mediados del siglo XVIII y el más prolífico de todos los tiempos. Nació en Suiza pero pasó casi toda su carrera en las academias de ciencias apoyadas por Catalina la Grande en San Petersburgo y Federico el Grande en Berlín. Las obras de colección de Euler llenan cerca de 100 grandes volúmenes. Como dijo el físico francés Arago, "Euler calculaba sin aparente esfuerzo como los hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire". Los cálculos y escritos de Euler no disminuyeron por cuidar de sus 13 hijos ni estar totalmente ciego los últimos 17 años de su vida. De hecho, ya ciego, dictaba sus descubrimientos a sus ayudantes gracias a su prodigiosa memoria e imaginación. Sus tratados de cálculo y de casi todos los otros temas de matemáticas fueron guía para la instrucción en matemáticas, y la ecuación $e^{i\pi} + 1 = 0$ que él descubrió reúne los cinco números más famosos de todas las matemáticas.

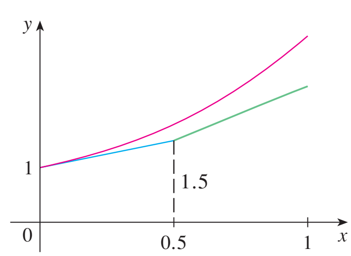


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.5

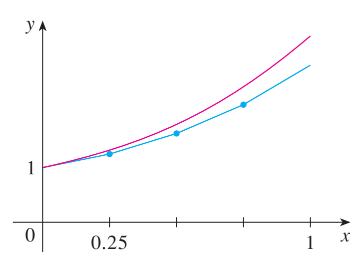


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.25

En general, el método de Euler propone empezar en el punto dado por el valor inicial y avanzar en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y avance en esta dirección. Continúe deteniéndose y cambiando la dirección de acuerdo con el campo direccional. El método de Euler no produce la solución exacta para un problema con valor inicial, da aproximaciones. Pero al disminuir el tamaño de paso (y por tanto se incrementa el número de las correcciones de mitad de curso), se obtienen aproximaciones cada vez mejores a la solución exacta. (Compare las figuras 12, 13 y 14.)

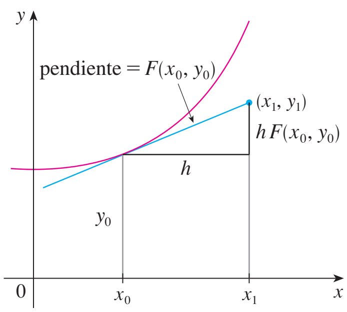


FIGURA 15

Para el problema general con valores iniciales de primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, nuestro objetivo es encontrar valores aproximados para la solución en números igualmente espaciados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, \ldots$, donde h es el tamaño de paso. La ecuación diferencial nos dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$, de modo que la figura 15 muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

De manera similar, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

En general, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Método de Euler Los valores aproximados para la solución del problema con valor inicial $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con tamaño de paso h, en $x_n = x_{n-1} + h$, son

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

EJEMPLO 3 Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para construir una tabla de valores aproximados de la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN Se tiene que $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $F(x, y) = x + y$. Así que tenemos

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

Esto significa que si $y(x)$ es la solución exacta, entonces $y(0.3) \approx 1.362$.

Procediendo con cálculos similares, se obtienen los valores de la tabla:

TEC Module 9.2B muestra cómo funciona el método de Euler desde el punto de vista numérico y visual para diversas ecuaciones diferenciales y tamaños de paso.

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

Para una tabla más exacta de valores del ejemplo 3, se podría disminuir el tamaño de paso. Pero para un gran número de pasos pequeños, la cantidad de cálculos es considerable y, por tanto, se requiere programar una calculadora o computadora para realizarlos. En la siguiente tabla se muestran los resultados de aplicar el método de Euler con tamaño de paso decreciente al problema con valor inicial del ejemplo 3.

Tamaño de paso	Estimación de Euler de $y(0.5)$	Estimación de Euler de $y(1)$
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

Los paquetes de software que producen soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales son refinaciones del método de Euler. Aunque el método de Euler es simple y no es preciso, se trata de la idea básica de la cual parten métodos más precisos.

Observe que las estimaciones de Euler en la tabla al parecer son límites de aproximación, es decir, los valores verdaderos de $y(0.5)$ y $y(1)$. En la figura 16 se muestran las gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de paso 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Cuando el tamaño de paso h se aproxima a 0, la tendencia es hacia la curva solución exacta.

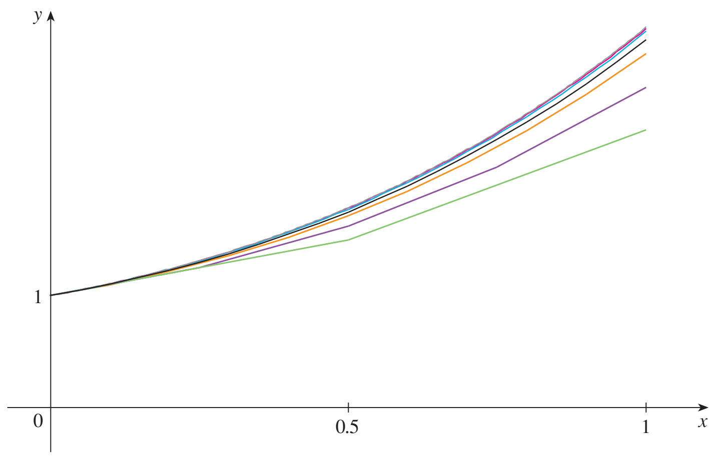


FIGURA 16
Aproximaciones de Euler que tienden a la solución exacta

V **EJEMPLO 4** En el ejemplo 2 se examinó un circuito eléctrico simple con resistencia 12 Ω, inductancia de 4 H y una batería con voltaje de 60 V. Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, se modela la corriente I en el tiempo t mediante el problema con valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente en el circuito medio segundo después de que se cierra el interruptor.

SOLUCIÓN Usamos el método de Euler con $F(t, 1) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

Así que la corriente después de 0.5 s es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

9.2 Ejercicios

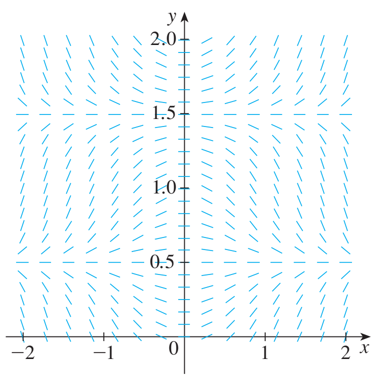
1. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x \cos \pi y$.

a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

i) $y(0) = 0$ ii) $y(0) = 0.5$

iii) $y(0) = 1$ iv) $y(0) = 1.6$

b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.



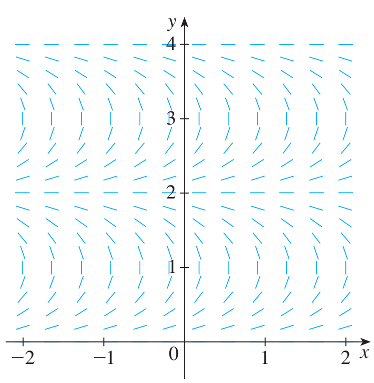
2. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = \tan\left(\frac{1}{2}\pi y\right)$.

a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

i) $y(0) = 1$ ii) $y(0) = 0.2$

iii) $y(0) = 2$ iv) $y(1) = 3$

b) Encuentre todas las soluciones de equilibrio.

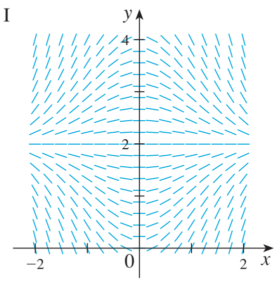


3-6 Relacione cada ecuación diferencial con su campo direccional (marcado I-IV). Dé razones para su respuesta.

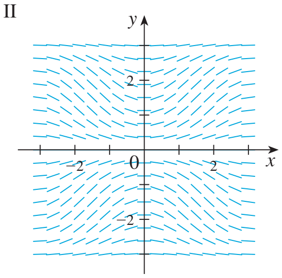
3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

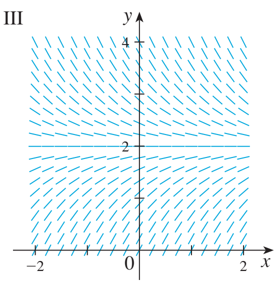
I



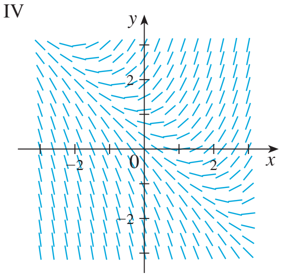
II



III



IV



7. Use el campo direccional marcado con II (arriba) para bosquejar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = 2$ c) $y(0) = -1$

8. Utilice el campo direccional marcado con IV (de arriba) para dibujar las gráficas solución que satisfacen las condiciones iniciales que se proporcionan.

a) $y(0) = -1$ b) $y(0) = 0$ c) $y(0) = 1$

9-10 Bosqueje un campo direccional para la ecuación diferencial. Después empléelo para bosquejar tres curvas solución.

9. $y' = \frac{1}{2}y$ **10.** $y' = x - y + 1$

11-14 Bosqueje el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para bosquejar una curva solución que pasa por el punto dado.

11. $y' = y - 2x$, $(1, 0)$ **12.** $y' = xy - x^2$, $(0, 1)$

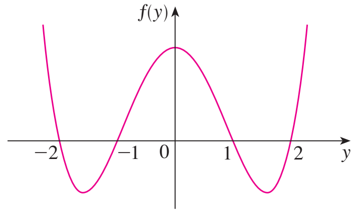
13. $y' = y + xy$, $(0, 1)$ **14.** $y' = x + y^2$, $(0, 0)$

SAC **15-16** Use un sistema algebraico computarizado para dibujar un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Imprímalo y bosqueje sobre él la curva solución que pasa por (0, 1). Después use el SAC para dibujar la curva solución y compárela con su bosquejo.

15. $y' = x^2 \operatorname{sen} y$ **16.** $y' = x(y^2 - 4)$

SAC **17.** Use un sistema algebraico computarizado para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y^3 - 4y$. Imprímalo y trace sobre él soluciones que satisfacen la condición inicial $y(0) = c$ para varios valores de c. ¿Para qué valores de c existe $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Cuáles son los posibles valores para este límite?

18. Trace un bosquejo aproximado de un campo direccional para la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$, donde la gráfica de f es como se muestra. ¿Cómo depende el comportamiento límite de las soluciones del valor de $y(0)$?

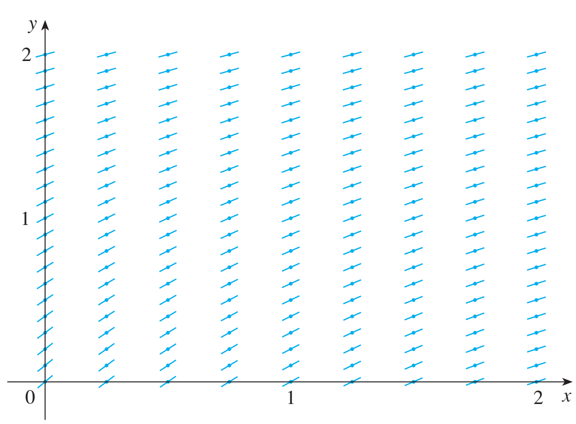


19. a) Use el método de Euler con cada uno de los siguientes tamaños de paso para estimar el valor de $y(0.4)$, donde y es la solución del problema con valores iniciales $y' = y$, $y(0) = 1$.
i) $h = 0.4$ ii) $h = 0.2$ iii) $h = 0.1$

b) Se sabe que la solución exacta del problema con valores iniciales del inciso a) es $y = e^x$. Dibuje, de la manera más exacta posible, la gráfica de $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 0.4$, junto con las aproximaciones de Euler usando el tamaño de paso del inciso a). (Sus bosquejos deben asemejarse a las figuras 12, 13 y 14.) Use sus bosquejos para decidir si sus estimaciones del inciso a) son subestimaciones o sobreestimaciones.

c) El error en el método de Euler es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Encuentre los errores cometidos en el inciso a) al usar el método de Euler para estimar el valor verdadero de $y(0.4)$, es decir, $e^{0.4}$. ¿Qué sucede con el tamaño del error cada vez que el tamaño de paso se reduce a la mitad?

20. Se muestra un campo direccional para una ecuación diferencial. Dibuje, con una regla, las gráficas de las aproximaciones de Euler a la curva solución que pasa por el origen. Use tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$. ¿Las estimaciones de Euler serán subestimaciones o sobreestimaciones? Explique.



21. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.5 para calcular los valores de y aproximados y_1, y_2, y_3 y y_4 de la solución del problema con valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = xy - x^2$, $y(0) = 1$.

23. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.5)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.
b) Repita el inciso a) con tamaño de paso 0.1.

25. a) Programe una calculadora o computadora a fin de usar el método de Euler para calcular $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

i) $h = 1$ ii) $h = 0.1$
iii) $h = 0.01$ iv) $h = 0.001$

b) Compruebe que $y = 2 + e^{-x^3}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial.

c) Encuentre los errores de usar el método de Euler para calcular $y(1)$ con los tamaños de paso del inciso a). ¿Qué sucede con el error cuando se divide entre 10 el tamaño de paso?

SAC **26.** a) Programe un sistema algebraico computarizado, usando el método de Euler con tamaño de paso 0.01, para calcular $y(2)$, donde y es la solución del problema con valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

b) Compruebe su trabajo por medio del SAC para dibujar la curva solución.

27. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con una capacitancia de C faradios (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs, C), de modo que en este caso la ley de Kirchhoff da

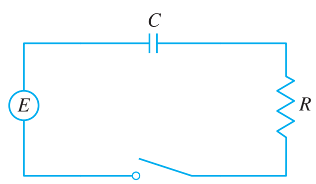
$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$, así que se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F y la batería da un voltaje constante de 60 V.
a) Dibuje un campo direccional para esta ecuación diferencial.
b) ¿Cuál es el valor límite de la carga?
c) ¿Hay una solución de equilibrio?
d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, emplee el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.



28. En el ejercicio 14 en la sección 9.1 se consideró una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Suponga que se sabe que la taza de café se enfría a razón de 1 °C por minuto cuando su temperatura es 70 °C.

a) En este caso, ¿en qué se convierte la ecuación diferencial?

b) Bosqueje un campo direccional y utilícelo para trazar la curva solución para el problema con valores iniciales. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

c) Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 Ecuaciones separables

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Desafortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x y una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. De manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

de modo que las y estén de un lado de la ecuación y las x estén del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

La ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen $\boxed{2}$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por tanto,
$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y
$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

a) Se expresa la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso b) se muestra en rojo.

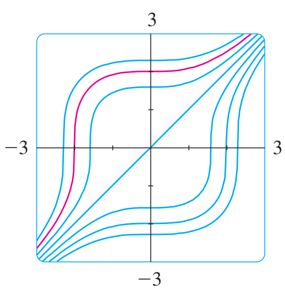


FIGURA 1

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Puesto que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

b) Si hacemos $x = 0$ en la solución general del inciso a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$, por tanto, $K = 8$. Así, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Como se ve en las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, −1, −2 y −3.

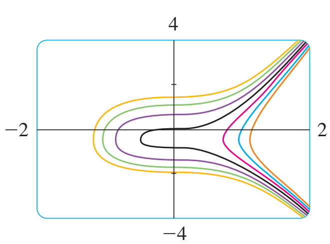


FIGURA 2

V EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)dy = 6x^2 dx$$

$$\int (2y + \cos y)dy = \int 6x^2 dx$$

3 $$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la ecuación utilizando la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, podemos reescribirla en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso podemos resolverla de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por tanto,

$$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se verifica fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$ o $A = -e^C$ o $A = 0$).

En la figura 3 se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones para varios valores de A. Si emplea el campo direccional para bosquejar curvas solución con intersecciones en y: 5, 2, 1, -1 y -2, se asemejarán a las curvas de la figura 4.

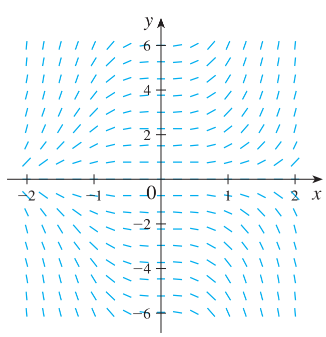


FIGURA 3

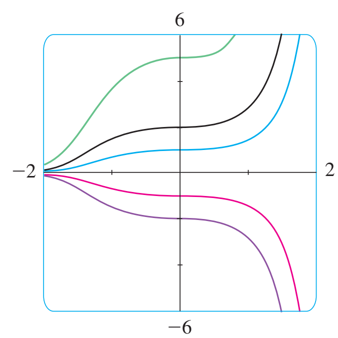


FIGURA 4

V **EJEMPLO 4** En la sección 9.2 se modeló la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico mostrado en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

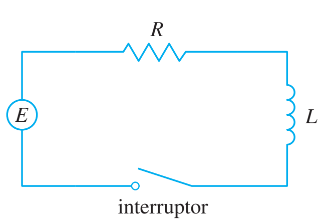


FIGURA 5

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería que da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Esta ecuación es de variables separables y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. La comparación con la figura 11 de la sección 9.2 muestra que se pudo dibujar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

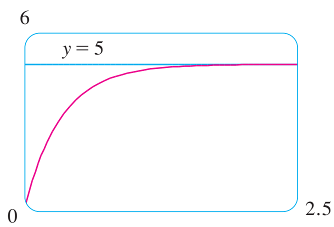


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que corta ortogonalmente cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (véase figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

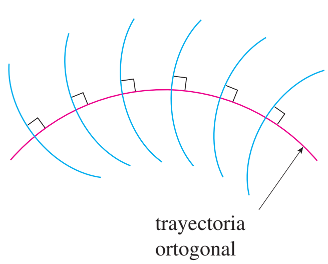


FIGURA 7

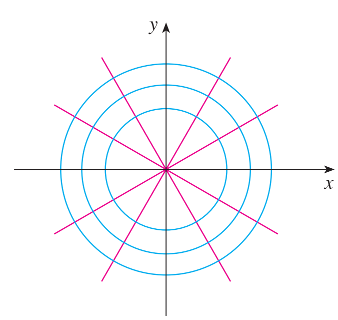


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfactoria para todos los miembros de la familia. Si derivamos $x = ky^2$, obtenemos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se observa que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$, por tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

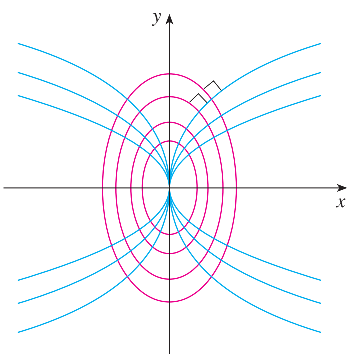


FIGURA 9

Esta ecuación diferencial es separable y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y bosquejada en la figura 9.

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

Problemas de mezclas

Un problema de mezclas característico involucra un tanque de capacidad fija lleno con una solución mezclada en todas sus partes de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la proporción entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, entonces $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un tanque contiene 20 kg de sal disuelta en 5 000 L de agua. Se introduce salmuera al tanque que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua a razón de 25 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del recipiente con la misma razón. ¿Cuánta sal queda en el recipiente después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se tiene como dato que $y(0) = 20$ y se quiere determinar $y(30)$. Esto se hace al hallar una ecuación diferencial que satisface $y(t)$. Observe que dy/dt es la rapidez de cambio de la cantidad de sal, por lo que

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{razón de entrada}) - (\text{razón de salida})$$

donde (razón de entrada) es la razón a la que la sal entra al recipiente y (razón de salida) es la razón a la que la sal sale del recipiente. Se tiene

$$\text{razón de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El tanque contiene siempre 5 000 L de líquido, así que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5\,000$ (medida en kilogramos por litro). Puesto que la salmuera sale a razón de 25 L/min, se tiene

$$\text{razón de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Así, de la ecuación 5 se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

En la figura 10 se muestra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 6. Observe que, conforme pasa el tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

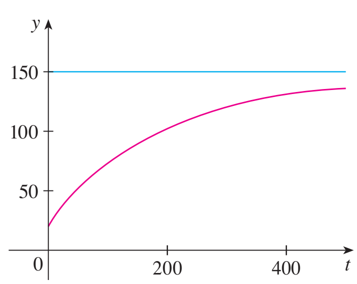


FIGURA 10

Puesto que $y(0) = 20$, se tiene $-\ln 130 = C$, así que

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por tanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Puesto que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, se deduce que $150 - y(t)$ es siempre positiva. Así, $|150 - y| = 150 - y$ y también

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg}$$

9.3 Ejercicios

1-10 Resuelva la ecuación diferencial

1. $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-y}$

3. $xy^2y' = x + 1$

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1$

5. $(y + \operatorname{sen} y)y' = x + x^3$

6. $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{s + 1}{sv + s}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{ye^{y+t^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec \theta}$

9. $\dfrac{dp}{dt} = t^2p - p + t^2 - 1$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11-18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \quad y(1) = 2$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $y' = \dfrac{xy \operatorname{sen} x}{y + 1}, \quad y(0) = 1$

15. $x \ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y', \quad y(1) = 1$

16. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$

17. $y' \tan x = a + y, \; y(\pi/3) = a, \quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, \; L(1) = -1$

19. Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto (0, 1) y cuya pendiente en (x, y) es xy.

20. Halle la función f tal que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resuelva la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resuelva la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.

b) Resuelva el problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y grafique la solución.

c) ¿El problema con valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$, tiene una solución? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique varias integrantes de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **25.** Resuelva el problema con valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y grafique la solución (si su SAC hace gráficas implícitas).

SAC **26.** Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y grafique varios miembros de la familia de soluciones (si su SAC hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

SAC **27-28**

a) Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial. Imprímalo y utilícelo para bosquejar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.

b) Resuelva la ecuación diferencial.

c) Emplee un SAC para trazar varias integrantes de la familia de soluciones obtenida en el inciso b). Compare con las curvas del inciso a).

27. $y' = y^2$

28. $y' = xy$

29-32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un dispositivo de graficación para trazar varios miembros de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33-35 Una ecuación integral es una ecuación que contiene una función desconocida $y(x)$ y una integral que involucra $y(x)$. Resuelva la ecuación integral dada. [*Sugerencia:* utilice una condición inicial obtenida de la ecuación integral.]

33. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_2^x [t - ty(t)]\, dt$

34. $y(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{ty(t)}, \quad x > 0$

35. $y(x) = 4 + \displaystyle\int_0^x 2t\sqrt{y(t)}\, dt$

Se requiere calculadora graficadora o computadora SAC Se requiere sistema algebraico computarizado **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

36. Encuentre una ecuación f tal que $f(3) = 2$ y

$$(t^2 + 1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \qquad t \neq 1$$

[*Sugerencia:* utilice la fórmula de la adición para $\tan(x + y)$ en la página de referencia 2.]

37. Resuelva el problema con valor inicial del ejercicio 27 en la sección 9.2 a fin de hallar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

38. En el ejercicio 28 de la sección 9.2, se examinó una ecuación diferencial que modela la temperatura de una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Resuelva la ecuación diferencial, a fin de hallar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

39. En el ejercicio 15 de la sección 9.1 se formuló un modelo para el aprendizaje en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad después de un tiempo de entrenamiento t, M es el nivel máximo de desempeño y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

40. En una reacción química elemental, las moléculas simples de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: $A + B \rightarrow C$. La ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.) De este modo, si las concentraciones iniciales son $[A] = a$ moles/L y $[B] = b$ moles/L y se escribe $x = [C]$, entonces se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

a) Suponiendo que $a \neq b$, determine x como una función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.
b) Determine $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[C] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

41. En contraste con la situación del ejercicio 40, los experimentos muestran que la reacción $H_2 + Br_2 \rightarrow 2HBr$ satisface la ley de rapidez

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

y, de este modo, para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [HBr]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.
a) Determine x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.
b) Si $a > b$, encuentre t como una función de x. [*Sugerencia:* al llevar a cabo la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

42. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15 °C. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25 °C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si hacemos que $S = dT/dr$, entonces S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala a fin de hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

43. Se administra una solución de glucosa por vía intravenosa en el torrente sanguíneo con una rapidez constante r. A medida que se añade la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo con una rapidez que es proporcional a la concentración en ese momento. De esta manera, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.
a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial.
b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete su respuesta.

44. Cierto país pequeño tiene 10 000 millones de dólares en papel moneda en circulación, y cada día entran a los bancos del país 50 millones. El gobierno decide introducir una nueva moneda y pide a los bancos que reemplacen los billetes viejos por los nuevos, siempre que la moneda antigua llegue a los bancos. Sea $x = x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.
a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema con valor inicial que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.
b) Resuelva el problema con valor inicial hallado en el inciso a).
c) ¿En cuánto tiempo los nuevos billetes representan 90% de la moneda en circulación?

45. Un tanque contiene 1 000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. El agua pura entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y sale con la misma razón. ¿Cuánta sal está en el tanque a) después de t minutos y b) después de 20 minutos?

46. El aire en una habitación con 180 m^3 de volumen contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Aire fresco con únicamente 0.05% de dióxido de carbono circula hacia adentro de la habitación a razón de 2 m^3/min y el aire mezclado circula hacia fuera en la misma proporción. Halle el porcentaje de dióxido de carbono en la habitación como una función del tiempo. ¿Qué sucede en periodos prolongados?

47. Un tanque con 500 galones de cerveza contiene 4% de alcohol (en volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia adentro del tanque a razón de 5 gal/min y la mezcla se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

48. Un tanque contiene 1 000 L de agua pura. La salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 5 L/min. Salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque a razón de 10 L/min. La solución se mantiene totalmente mezclada y sale del tanque a razón de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque a) después de t minutos y b) después de una hora?

49. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta de tamaño y, por tanto, su masa en tiempo t es una función de t, $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando se aplica la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, se obtiene $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (con dirección hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal de g y k.

50. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

b) Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Newton fue el primero en proponer este modelo.) Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

51. En Biología, el *crecimiento alómero* se refiere a las relaciones entre tamaños de partes de un organismo (longitud del cráneo y longitud del cuerpo, por ejemplo). Si $L_1(t)$ y $L_2(t)$ son los tamaños de dos órganos en un organismo de edad t, entonces L_1 y L_2 satisfacen la ley alómera si sus tasas de crecimiento específicas son proporcionales:

$$\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt}$$

donde k es una constante.

a) Utilice la ley alómera para describir una ecuación diferencial que relacione L_1 y L_2 y resuélvala para expresar L_1 como función de L_2.

b) En un estudio de varias especies de algas unicelulares, la constante de proporcionalidad de la ley alómera que relaciona B (biomasa celular) y V (volumen celular) se encontró que es $k = 0.0794$. Exprese B como función de V.

52. La homeostasis se refiere a un estado en el que el contenido de nutrientes de un consumidor es independiente del contenido. En ausencia de la homeostasis, un modelo propuesto por Sterner y Elser está dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x}$$

donde x y y representan el contenido de nutrientes del alimento y el consumidor, respectivamente, y θ es una constante con $\theta \geqslant 1$.

a) Resuelva la ecuación diferencial

b) ¿Qué ocurre cuando $\theta = 1$? ¿Y qué ocurre cuando $\theta \to \infty$?

53. Sea $A(t)$ el área de un cultivo de tejido en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando se completa el crecimiento. La mayor parte de las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de células de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Así, un modelo razonable para el crecimiento del tejido se obtiene suponiendo que la rapidez de crecimiento del área es proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

a) Formule una ecuación diferencial y empléela para demostrar que el tejido crece más rápido cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

SAC b) Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $A(t)$. Use un sistema algebraico computacional para llevar a cabo la integración.

54. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Asimismo, por la segunda ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y, por tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

a) Suponga que un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie alcanzada por el objeto. Demuestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia:* por la regla de la cadena, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Este límite se llama *velocidad de escape* para la Tierra.

c) Use $R = 3\,960$ mi y $g = 32$ pies/s^2 para calcular v_e en pies por segundo y en millas por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ TAN RÁPIDO DRENA UN TANQUE?

Si el agua (u otro líquido) drena de un tanque, se espera que el flujo sea mayor al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y disminuya poco a poco a medida que disminuye el nivel del agua. Pero se necesita una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo, a fin de contestar el tipo de preguntas que hacen los ingenieros: ¿en cuánto tiempo se drena por completo un tanque? ¿Cuánta agua debe contener un tanque a fin de garantizar cierta presión de agua mínima para un sistema de aspersión?

Sea $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de agua en el tanque en el tiempo t. Si el agua sale por un orificio con área a en el fondo del tanque, entonces la ley de Torricelli dice que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la rapidez a la cual fluye el agua desde el tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura de 6 pies y radio de 2 pies, y el orificio es circular con radio de 1 pulgada. Si se toma $g = 32$ pies/s², demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el tiempo t, bajo el supuesto de que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

c) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

2. Como resultado de la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es bastante exacto. En cambio, el modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se emplea con más frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina de los datos relacionados con el drenado del tanque.

a) Suponga que hacemos un orificio en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (arriba del orificio) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la ecuación 2 a fin de hallar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

b) Haga un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de bebida gaseosa de dos litros. Adhiera una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 que corresponde a la parte superior del orificio. Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Luego quite su dedo del orificio y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que transcurren 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso a). ¿Qué tan bien predice el modelo los valores reales?

El problema 2b se realiza mejor como una demostración de salón de clases o como un proyecto de grupo con tres alumnos en cada grupo: un cronometrador que indique los segundos, una persona a cargo de la altura cada 10 segundos y alguien que registre estos valores.

3. En muchas partes del mundo, el agua para los sistemas de aspersión en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos en o cerca de los techos de los edificios. Suponga que un tanque de este tipo tiene radio de 10 pies y que el diámetro de la salida es de 2.5 pulgadas. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua será por lo menos 2160 lb/pie² por un periodo de 10 minutos. (Cuando se presenta un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tomar hasta 10 minutos la activación del generador de emergencia y la bomba de agua.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, a fin de garantizar la presión? (Use el hecho de que la presión del agua a una profundidad de d pies es $P = 62.5d$. Véase la sección 8.3.)

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene área de sección transversal $A(h)$ a la altura h. Entonces el volumen del agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\,du$ y, por tanto, el teorema fundamental del cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\,\frac{dh}{dt} = A(h)\,\frac{dh}{dt}$$

y, por consiguiente, la ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio 2 m y al principio está lleno con agua hasta la mitad. Si el radio del orificio circular es 1 cm y se toma $g = 10\ \text{m/s}^2$, demuestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\,\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

b) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿QUÉ ES MÁS RÁPIDO, SUBIR O BAJAR?

Suponga que lanza una bola al aire. ¿Considera que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? En este proyecto se resolverá este problema pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga una conjetura con base en su intuición física.

Al modelar la fuerza debida a la resistencia del aire, se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y la rapidez de la bola. Aquí se usa un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el camino ascendente y pv^2 en el camino descendente) es otra posibilidad para magnitudes de velocidades más altas (véase el ejercicio 50 en la sección 9.3). Para una pelota de golf, los experimentos han mostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ hacia arriba y $p|v|^{1.3}$ hacia abajo. Pero no importa qué función fuerza $-f(v)$ se emplee [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta es la misma. Véase F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually," *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), pp. 437-440.

1. Una bola con masa m se lanza hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial positiva v_0. Se supone que las fuerzas que actúan sobre la bola son la fuerza de gravedad y una fuerza retardadora por la resistencia del aire con dirección opuesta a la dirección del movimiento y con magnitud $p|v(t)|$ donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la bola en el tiempo t. Tanto en el ascenso como en el descenso, la fuerza total que actúa sobre la bola es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba.] Así, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para demostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Demuestre que la altura de la bola, hasta que choca con el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima. Demuestre que

$$t_1 = \frac{m}{p} \ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Determine este tiempo para una bola con masa 1 kg y velocidad inicial 20 m/s. Suponga que la resistencia de aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo que la bola cae de regreso a la Tierra. Para la bola particular del problema 3, estime t_2 por medio de una gráfica de la función altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil determinar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ en forma explícita. Sin embargo, se puede usar un método directo para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido: se determina si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. Demuestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Después demuestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué se puede concluir? ¿Es más rápido el ascenso o el descenso?

9.4 Modelos de crecimiento poblacional

En esta sección se estudian ecuaciones diferenciales que se aplican para modelar el crecimiento de población: la ley de crecimiento natural, la ecuación logística y otras.

Ley de crecimiento natural

Uno de los modelos para el crecimiento poblacional considerado en la sección 9.1 se basó en la suposición de que la población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

¿Es ésa una suposición razonable? Suponga que se tiene una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1000$ y en determinado momento crece con una rapidez de $P' = 300$ bacterias por hora. Ahora se toman otras 1000 bacterias del mismo tipo y se colocan en la primera población. Cada mitad de la nueva población creció en una proporción de 300 bacterias por hora. Se esperaría que la población total de 2 000 se incrementara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que haya espacio suficiente y nutrición). De este modo, si se duplica el tamaño, se duplica la proporción de crecimiento. En general, parece razonable que la rapidez de crecimiento deba ser proporcional al tamaño.

En general, si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la rapidez de cambio de P con respecto a t es proporcional a su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, entonces

1
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

donde k es una constante. La ecuación 1 se llama a veces **ley de crecimiento natural**. Si k es positiva, entonces se incrementa la población; si k es negativa, decrece.

Debido a que es una ecuación diferencial separable se puede resolver por los métodos de la sección 9.3:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln|P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

donde A $(= \pm e^C$ o $0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, se observa que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por tanto, A es el valor inicial de la función.

Los ejemplos y ejercicios de la aplicación de $\boxed{2}$ se proporcionan en la sección 3.8

$\boxed{2}$ La solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Otra manera de escribir la ecuación 1 es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

la cual dice que la **rapidez de crecimiento relativo** (rapidez de crecimiento dividida por el tamaño de la población) es constante. Por tanto, $\boxed{2}$ dice que una población con crecimiento relativo constante debe crecer de forma exponencial.

Se puede considerar emigración (o "recolectores") de una población modificando la ecuación 1; si la rapidez de emigración es una constante m, entonces la rapidez de cambio de la población se representa mediante la ecuación diferencial

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

Vea el ejercicio 15 para la solución y las consecuencias de la ecuación 3.

Modelo logístico

Como se explicó en la sección 9.1, una población suele incrementarse de forma exponencial en sus primeras etapas, pero se estabiliza finalmente y tiende a su capacidad de soporte debido a los recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, se supone que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esto dice que la rapidez de crecimiento inicial está muy cerca de ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la rapidez de crecimiento relativa es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también se quiere reflejar el hecho de que la rapidez de crecimiento relativa disminuye cuando se incrementa la población P y se vuelve negativa si P excede alguna vez su **capacidad de soporte** M, la población máxima que el ambiente es capaz de sostener a la larga. La expresión más simple para la rapidez de crecimiento relativa que incorpora estas suposiciones es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Al multiplicar por P, se obtiene el modelo para el crecimiento poblacional conocido como **ecuación diferencial logística**

4 $$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)}$$

Observe de la ecuación 4 que si P es pequeña en comparación con M, entonces P/M es cercano a cero y, por tanto, $dP/dt \approx kP$. Sin embargo, si $P \to M$ (la población se aproxima a su capacidad de soporte), entonces $P/M \to 1$, así que $dP/dt \to 0$. Se puede deducir información acerca de si las soluciones se incrementan o disminuyen directamente de la ecuación 4. Si la población P está entre 0 y M, entonces el lado derecho de la ecuación es positivo, así que $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población excede la capacidad de soporte ($P > M$), entonces $1 - P/M$ es negativa, de modo que $dP/dt < 0$ y la población decrece.

Iniciamos el análisis más detallado de la ecuación diferencial logística considerando un campo direccional.

V EJEMPLO 1 Dibuje un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de soporte $M = 1000$. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Un campo direccional para esta ecuación se muestra en la figura 1. Se muestra sólo el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no son significativas y se tiene interés sólo en lo que sucede después de $t = 0$.

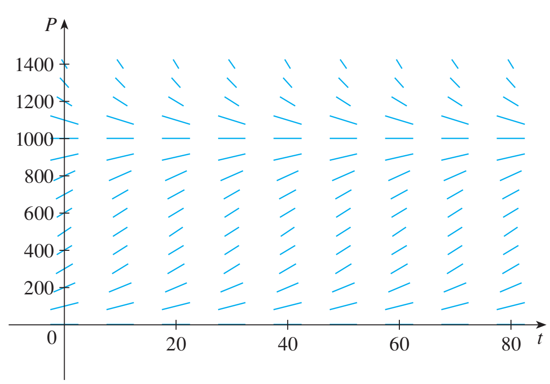


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt depende sólo de P, no de t), así que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como se esperaba, las pendientes son positivas para $0 < P < 1000$ y negativas para $P > 1000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P se aproxima a 0 o 1000 (la capacidad de soporte). Observe que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1000$.

En la figura 2 se usa el campo direccional para bosquejar curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ y $P(0) = 1300$. Note que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 1000$ son crecientes y las que empiezan arriba de $P = 1000$ son decrecientes. Las pendientes son mayores cuando $P \approx 500$ y, en consecuencia, las curvas solución abajo de $P = 1000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho, se puede probar que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500 (véase el ejercicio 11).

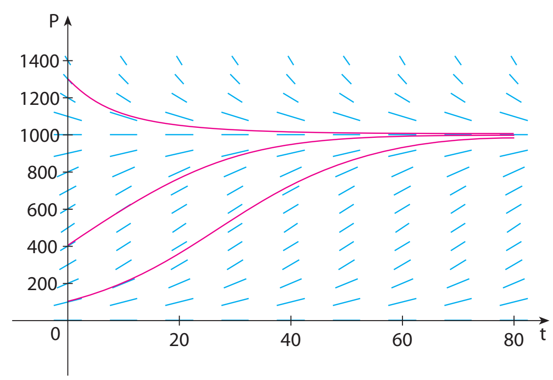


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística $\boxed{4}$ es separable y, por tanto, se puede resolver de manera explícita con el método de la sección 9.3. Puesto que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

se tiene

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\, dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, escribimos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Empleando fracciones parciales (véase sección 7.4), obtenemos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

Esto permite reescribir la ecuación 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P} \right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{M - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{M - P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

6 $$\frac{M - P}{P} = Ae^{-kt}$$

donde $A = \pm e^{-C}$. Si la ecuación 6 se resuelve para P, se obtiene

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

por tanto, $$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos el valor de A si escribimos $t = 0$ en la ecuación 6. Si $t = 0$, entonces $P = P_0$ (la población inicial), por tanto,

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Así, la solución para la ecuación logística es

7 $$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{donde } A = \frac{M - P_0}{P_0}}$$

Al usar la expresión para $P(t)$ en la ecuación 7, se ve que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = M$$

lo cual era de esperarse.

EJEMPLO 2 Escriba la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para hallar los tamaños de población $P(40)$ y $P(80)$. ¿En qué momento la población llega a 900?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0.08$, capacidad de soporte $M = 1000$, y población inicial $P_0 = 100$. Por tanto, la ecuación 7 da la población en el tiempo t cuando

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0.08t}} \qquad \text{donde } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

Así,

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Por consiguiente, los tamaños de población cuando $t = 40$ y 80 son

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

La población llega a 900 cuando

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Resolviendo esta ecuación para t, se obtiene

Compare la curva solución en la figura 3 con la curva solución inferior que se trazó a partir del campo direccional en la figura 2.

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

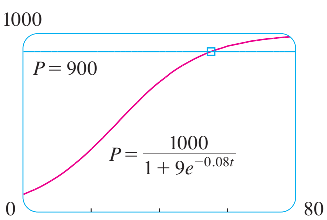


FIGURA 3

De modo que la población llega a 900 cuando t es aproximadamente 55. Como comprobación del trabajo, se grafica la curva de población en la figura 3 y se observa que cruza la recta $P = 900$. El cursor indica que $t \approx 55$.

Comparación del crecimiento natural y modelos logísticos

En la década de 1930, el biólogo G. F. Gause realizó un experimento con el protozoario *Paramecium* y empleó una ecuación logística para representar sus datos. En la tabla se da la cuenta diaria de la población de protozoarios. Estimó la rapidez de crecimiento relativo inicial como 0.7944 y la capacidad de soporte como 64.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

V EJEMPLO 3 Encuentre los modelos exponencial y logístico para los datos de Gause. Compare los valores predichos con los valores observados y comente acerca del ajuste.

SOLUCIÓN Dada la rapidez de crecimiento relativo $k = 0.7944$ y la población inicial $P_0 = 2$, el modelo exponencial es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause empleó el mismo valor de k para su modelo logístico. [Esto es razonable porque $P_0 = 2$ es pequeña comparada con la capacidad de soporte ($M = 64$). La ecuación

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

muestra que el valor de k para la ecuación logística es muy cercano al valor para el modelo exponencial.]

Entonces la solución de la ecuación logística en la ecuación 7 da

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

donde $$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Por consiguiente, $$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Estas ecuaciones se emplean para calcular los valores predichos (redondeados hasta el entero más próximo) y se comparan en la tabla.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	...										

Se observa de la tabla y la gráfica de la figura 4 que para los primeros tres o cuatro días el modelo exponencial da resultados comparables a los del modelo logístico más complejo. Sin embargo para $t \geqslant 5$, el modelo exponencial es inexacto, pero el modelo logístico ajusta las observaciones razonablemente bien.

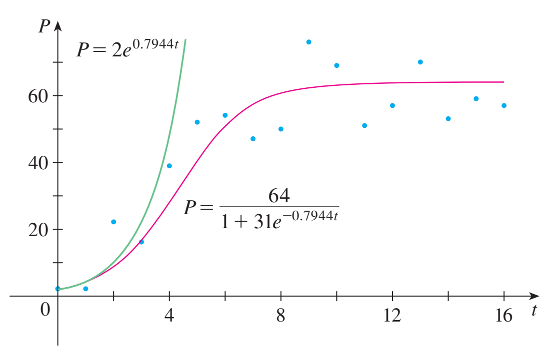


FIGURA 4
Modelos exponencial y logístico para los datos de *Paramecium*

Varios países que antes experimentaron crecimiento exponencial ahora están encontrando que su rapidez de crecimiento poblacional está declinando y el modelo logístico proporciona un buen modelo.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9 847	1992	10 036
1982	9 856	1994	10 109
1984	9 855	1996	10 152
1986	9 862	1998	10 175
1988	9 884	2000	10 186
1990	9 962		

La tabla al margen muestra valores semestrales de $B(t)$, la población de Bélgica, en miles, al tiempo t, desde 1980 hasta 2000. La figura 5 muestra estos puntos de información junto con una función logística desplazada que se obtiene de una calculadora con la capacidad de ajustar una función logística a estos puntos mediante regresión. Es observable que el modelo logístico proporciona un buen ajuste.

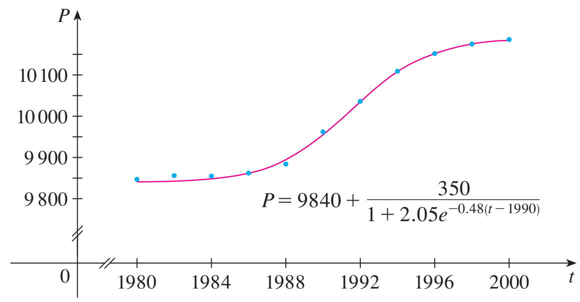


FIGURA 5
Modelo logístico para la población de Bélgica

Otros modelos para el crecimiento poblacional

La ley de crecimiento natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones que han sido propuestas para modelar el crecimiento poblacional. En el ejercicio 20 se trabaja con la función de crecimiento de Gompertz y en los ejercicios 21 y 22 se investigan modelos de crecimiento estacionales.

Dos de los otros modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

se ha empleado para modelar poblaciones que están sujetas a la "recolección" de un tipo u otro. (Piense en una población de peces capturados en una proporción constante.) Esta ecuación se explora en los ejercicios 17 y 18.

Para algunas especies hay un nivel mínimo de población m debajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Es posible que los adultos no encuentren parejas adecuadas.) Esta clase de poblaciones ha sido representada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor extra, $1 - m/P$, toma en cuenta las consecuencias de una población escasa (véase el ejercicio 19).

9.4 Ejercicios

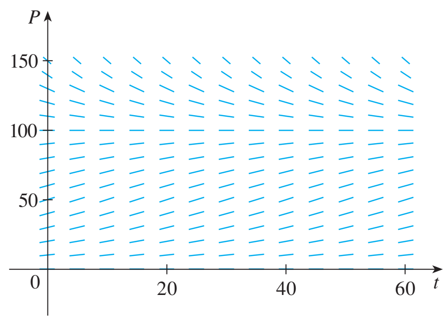
1. Suponga que una población se desarrolla de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

donde t se mide en semanas.

a) ¿Cuál es la capacidad de soporte? ¿Cuál es el valor de k?

b) Se muestra un campo direccional para esta ecuación. ¿Dónde las pendientes son cercanas a 0? ¿Dónde son mayores? ¿Qué soluciones son crecientes? ¿Cuáles soluciones son decrecientes?



c) Use el campo direccional para bosquejar las soluciones para poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140. ¿Qué tienen en común estas soluciones? ¿Cómo difieren? ¿Qué soluciones tienen puntos de inflexión? ¿A qué niveles de población se presentan?

d) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cómo se relacionan estas soluciones con las otras?

2. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de soporte de 6000 y $k = 0.0015$ por año.

a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos.

b) Dibuje un campo direccional (ya sea a mano o con un sistema algebraico computarizado). ¿Qué le dice acerca de las curvas solución?

c) Use el campo direccional para bosquejar las curvas solución para las poblaciones iniciales de 1000, 2000, 4000 y 8000. ¿Qué se puede decir acerca de la concavidad de estas curvas? ¿Cuál es la importancia de los puntos de inflexión?

d) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler con tamaño de paso $h = 1$ para estimar la población después de 50 años si la población inicial es 1000.

e) Si la población inicial es 1000, escriba una fórmula para la población después de t años. Empléela para determinar la población después de 50 años y compárela con su estimación en el inciso d).

f) Grafique la solución del inciso e) y compare con la curva solución que bosquejó en el inciso c).

3. La pesca del mero del Pacífico ha sido representada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

donde $y(t)$ es la biomasa (la masa total de los integrantes de la población) en kilogramos en el tiempo t (medido en años), la capacidad de soporte se estima como $M = 8 \times 10^7$ kg, y $k = 0.71$ por año.

a) Si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule la biomasa un año después.

b) ¿En cuánto tiempo la biomasa alcanza 4×10^7 kg?

4. Suponga una población $P(t)$ que satisface

$$\frac{dP}{dt} = 0.4P - 0.001P^2 \qquad P(0) = 50$$

donde t se mide en años.

a) ¿Cuál es la capacidad de soporte?

b) ¿Qué es $P'(0)$?

c) ¿Cuándo alcanzará la población el 50% de su capacidad de soporte?

5. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con población inicial de 1000 y capacidad de soporte de 10000. Si la población crece a 2500 después de un año ¿cuál será la población después de otros tres años?

6. En la tabla se da el número de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio.

Tiempo (horas)	Células de levadura	Tiempo (horas)	Células de levadura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

a) Grafique los datos y use la gráfica para estimar la capacidad de soporte para la población de levadura.

b) Use los datos para estimar la tasa de crecimiento relativo inicial.

c) Encuentre un modelo exponencial y un modelo logístico para estos datos.

d) Compare los valores predichos con los valores observados, en una tabla y con gráficas. Comente acerca de qué tan bien ajustan sus modelos los datos.

e) Use el modelo logístico para estimar el número de células de levadura después de 7 horas.

7. La población del mundo fue cercana a 5.3 miles de millones en 1990. La tasa de nacimientos en la década de 1990 varió de 35 a 40 millones por año y la frecuencia de mortalidad varió de 15 a 20 millones por año. Suponga que la capacidad de soporte para la población mundial es 100000 millones.

a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos. (Debido a que la población inicial es pequeña comparada con la capacidad de soporte, se puede tomar k como una estimación de la rapidez de crecimiento relativo inicial.)

b) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en el año 2000, y compare con la población real de 6100 millones.

c) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en los años 2100 y 2500.

d) ¿Cuáles son sus predicciones si la capacidad de soporte es 50 000 millones?

8. a) Haga una suposición en cuanto a la capacidad de soporte para la población de Estados Unidos. Utilícela junto con el hecho de que la población fue de 250 millones en 1990, a fin de formular un modelo logístico para la población de Estados Unidos.

b) Determine el valor de k en su modelo usando el hecho de que la población en el año 2000 fue de 275 millones.

c) Use su modelo para predecir la población de Estados Unidos en los años 2100 y 2200.

d) Por medio de su modelo, prediga el año en que la población de Estados Unidos pasará de 350 millones.

9. Un modelo para la difusión de un rumor, es que la rapidez de difusión es proporcional al producto de la fracción y de la población que ha escuchado el rumor y la fracción que no lo ha escuchado.

a) Escriba una ecuación diferencial que se satisfaga mediante y.

b) Resuelva la ecuación diferencial.

c) Un pequeño pueblo tiene 1000 habitantes. A las 8 A.M., 80 personas han escuchado un rumor. A mediodía la mitad del pueblo lo ha escuchado. ¿En qué tiempo 90% de la población ha escuchado el rumor?

10. Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de soporte (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) en 10 000. El número de peces se triplicó en el primer año.

a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.

b) ¿En cuánto tiempo la población se incrementa a 5 000?

11. a) Demuestre que si P satisface la ecuación logística $\boxed{4}$, entonces

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{2P}{M}\right)$$

b) Deduzca que una población crece más rápido cuando alcanza la mitad de su capacidad de soporte.

12. Para un valor fijo de M (por ejemplo $M = 10$), la familia de funciones logísticas dada por la ecuación 7 depende del valor inicial de P_0 y la constante de proporcionalidad k. Grafique varios integrantes de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando varía P_0? ¿Cómo cambia cuando varía k?

13. La tabla proporciona la población semestral de Japón, en miles, desde 1960 hasta 2005.

Año	Población	Año	Población
1960	94 092	1985	120 754
1965	98 883	1990	123 537
1970	104 345	1995	125 341
1975	111 573	2000	126 700
1980	116 807	2005	127 417

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia:* reste 94 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener una representación de su calculadora, sume 94 000 para obtener su modelo final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1960 o bien 1980.]

14. La tabla proporciona la población semestral de España, en miles, desde 1955 hasta 2000.

Año	Población	Año	Población
1955	29 319	1980	37 488
1960	30 641	1985	38 535
1965	32 085	1990	39 351
1970	33 876	1995	39 750
1975	35 564	2000	40 016

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial como una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia:* reste 29 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener un modelo de su calculadora, sume 29 000 para obtener su representación final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1955 o bien 1975.]

15. Considere una población $P = P(t)$ con rapidez de nacimiento y de mortalidad constante α y β, respectivamente y una razón m de emigración constante, donde α, β y m son constantes positivas. Suponga que $\alpha > \beta$. Entonces la razón de cambio de la población en el tiempo t se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{donde } k = \alpha - \beta$$

a) Hallar la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $P(0) = P_0$.

b) ¿Qué condición de m conducirá a una expansión exponencial de la población?

c) ¿Qué condición de m dará como resultado una población constante? ¿Una población que decline?

d) En 1847, la población de Irlanda fue de casi 8 millones y la diferencia entre las tasas de nacimiento relativo y la mortalidad fue de 1.6% de la población. Debido a la escasez de papas en las décadas de 1840 y 1850, casi 210 000 habitantes por cada año emigraron de Irlanda. ¿En ese tiempo la población se expandió o fue declinante?

16. Sea c un número positivo. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

donde k es una constante positiva, se le denomina *ecuación del día del juicio final* ya que el exponente en la expresión ky^{1+c} es más grande que el exponente 1 para el crecimiento natural.

a) Determine la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_0$.
b) Demuestre que existe un tiempo finito $t = T$ (del juicio final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.
c) Una especie especialmente prolífica de conejos tiene el término de crecimiento $My^{1.01}$. Si 2 de tal especie de conejos al principio y en la madriguera tiene 16 conejos después de tres meses, entonces ¿cuándo es el día del juicio final?

17. La ecuación diferencial logística del ejemplo 1 se modificará como sigue

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

a) Suponga que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término (-15).
b) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.
c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
d) Use el campo direccional para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población de peces para diferentes poblaciones iniciales.
SAC e) Resuelva esta ecuación diferencial de manera explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computarizado. Use las poblaciones iniciales 200 y 300. Grafique las soluciones y compare con sus bosquejos del inciso d).

SAC **18.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como un modelo para una población de peces, donde t se mide en semanas y c es una constante.

a) Use un SAC para trazar los campos direccionales para varios valores de c.
b) De sus campos direccionales del inciso a), determine los valores de c para los cuales hay por lo menos una solución de equilibrio. ¿Para qué valores de c la población de peces se extingue siempre?
c) Use la ecuación diferencial para probar lo que descubrió en forma gráfica en el inciso b).
d) ¿Qué recomendaría como límite para la captura semanal de esta población de peces?

19. Existe evidencia considerable para apoyar la teoría de que para algunas especies hay una población mínima m tal que las especies se extinguirán si el tamaño de la población cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística introduciendo el factor $(1 - m/P)$. Así, el modelo logístico modificado está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

a) Use la ecuación diferencial para demostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < M$ y decreciente si $0 < P < m$.
b) Para el caso donde $k = 0.08$, $M = 1000$ y $m = 200$, dibuje un campo direccional y utilícelo para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población para varias poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
c) Resuelva la ecuación diferencial de forma explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computacional. Use la población inicial P_0.
d) Use la solución del inciso c) para demostrar que si $P_0 < m$, entonces la especie se extingue. [*Sugerencia:* demuestre que el numerador en su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t.]

20. Otro modelo para una función de crecimiento de una población limitada está dado por la **función de Gompertz**, que es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{M}{P}\right)P$$

donde c es una constante y M es la capacidad de soporte.

a) Resuelva esta ecuación diferencial.
b) Calcule $\lim_{t \to \infty} P(t)$.
c) Grafique la función de crecimiento de Gompertz para $M = 1000$, $P_0 = 100$ y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del ejemplo 2. ¿Cuáles son las semejanzas? ¿Cuáles son las diferencias?
d) Se sabe del ejercicio 11 que la función logística crece más rápido cuando $P = M/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para demostrar que la función de Gompertz crece más rápido cuando $P = M/e$.

21. En un **modelo de crecimiento estacional**, se introduce una función periódica del tiempo para explicar las variaciones estacionales en la tasa de crecimiento. Tales variaciones podrían, por ejemplo, ser causadas por cambios estacionales en la disponibilidad de alimento.

a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento estacional

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.
b) Grafique la solución para diferentes valores de k, r y ϕ y explique cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ. ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{t \to \infty} P(t)$?

22. Suponga que se modifica la ecuación diferencial del ejercicio 21 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

a) Resuelva esta ecuación diferencial con la ayuda de una tabla de integrales o un SAC.

b) Grafique la solución para varios valores de k, r y ϕ. ¿Cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ? ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

23. Las gráficas de las funciones logísticas (figuras 2 y 3) se ven sospechosamente similares a la gráfica de la función tangente hiperbólica (figura 3 en la sección 3.11). Explique la semejanza demostrando que la función logística dada por la ecuación 7 se puede escribir como

$$P(t) = \tfrac{1}{2}M\left[1 + \tanh\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

donde $c = (\ln A)/k$. Así, la función logística es en realidad una tangente hiperbólica desplazada.

9.5 Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que se puede escribir en la forma

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas sobre un determinado intervalo. Este tipo de ecuación se presenta con frecuencia en varias ciencias, como se verá.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$\boxed{2} \qquad y' + \frac{1}{x}y = 2$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se observa, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \quad \text{o} \quad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.

Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada *factor integrante*. Se intenta hallar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)y$:

$$\boxed{3} \qquad I(x)\big(y' + P(x)y\big) = \big(I(x)y\big)'$$

Si se puede hallar tal función I, entonces la ecuación 1 se convierte en

$$\big(I(x)y\big)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

de modo que la solución sería

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

Para hallar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se cancelan términos:

$$I(x)y' + I(x)\,P(x)y = \big(I(x)y\big)' = I'(x)y + I(x)y'$$
$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I, que se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^C$. Se busca un factor integrante particular, no el más general, así que se toma $A = 1$ y se usa

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Así, la ecuación 4 da una fórmula para la solución general de la ecuación 1, donde I se determina mediante la ecuación 5. Sin embargo, en lugar de memorizar esta fórmula, sólo se recuerda la forma del factor integrante.

> Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplicamos ambos lados por el **factor integrante** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integramos ambos lados.

V EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, puesto que tiene la forma de la ecuación 1 con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, se obtiene

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o bien,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que se aproximan a 2 cuando $x \longrightarrow \infty$.

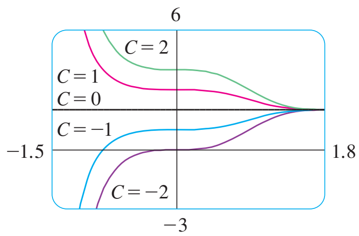


FIGURA 1

Al integrar ambos lados se tiene

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

V EJEMPLO 2 Encuentre la solución del problema con valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Se deben dividir primero ambos lados entre el coeficiente de y' para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar:

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Al multiplicar la ecuación 6 por x, se obtiene

$$xy' + y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Entonces $$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

La solución del problema de valor inicial del ejemplo 2 se muestra en la figura 2.

y, de este modo, $$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Puesto que $y(1) = 2$, se tiene

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

En consecuencia, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

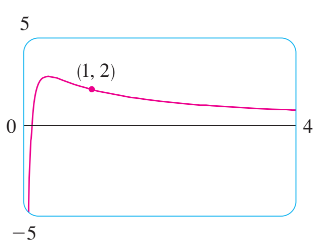


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Resuelva $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar para una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor integrante

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

se obtiene $$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$$

o bien, $$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}$$

Por tanto $$e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$$

Aun cuando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se pueden expresar en términos de una integral, aun se pueden graficar mediante un sistema algebraico computarizado (figura 3).

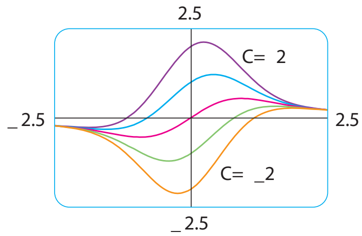


FIGURA 3

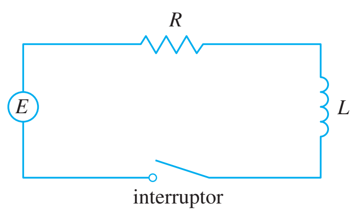


FIGURA 4

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}\,dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una función perfectamente buena y se puede dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Se puede elegir cualquier número para el límite de integración inferior.)

Aplicación a circuitos eléctricos

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple mostrado en la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo común, una batería o generador) produce un voltaje de $E(t)$ voltios (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms Ω y un inductor con una inductancia de L henrios (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución da la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 4 Suponga que en el circuito simple de la figura 4 la resistencia es 12 Ω y la inductancia es 4 H. Si una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, encuentre a) $I(t)$, b) la corriente después de 1 s y c) el valor límite de la corriente.

La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y separable, así que un método alternativo es resolverla como una ecuación separable (ejemplo 4 de la sección 9.3). Sin embargo, si se reemplaza la batería por un generador, se obtiene una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

SOLUCIÓN

a) Si se escribe $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, se obtiene el problema con valores iniciales

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o bien,

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor integrante $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, se obtiene

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

En la figura 5 se muestra cómo la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

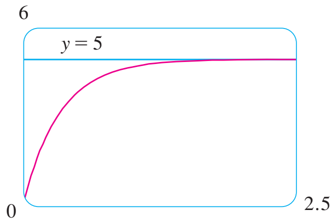


FIGURA 5

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 + C = 0$, por tanto, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

b) Después de un segundo, la corriente es

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

c) El valor límite de la corriente está dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

EJEMPLO 5 Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo 4 pero, en lugar de la batería, se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encuentre $I(t)$.

SOLUCIÓN Esta vez la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

El mismo factor integrante e^{3t} da

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la corriente cuando se reemplaza la batería por un generador.

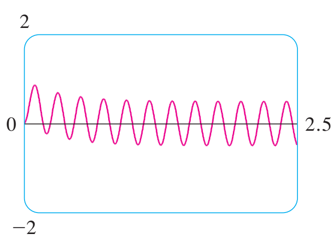


FIGURA 6

Por medio de la fórmula 98 de la tabla de integrales, se tiene

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\,dt = 15\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30\cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Puesto que $I(0) = 0$ se obtiene

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

Por tanto, $$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10\cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$

9.5 Ejercicios

1-4 Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $x - y' = xy$

2. $y' + xy^2 = \sqrt{x}$

3. $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

4. $y \operatorname{sen} x = x^2y' - x$

5-14 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' + y = 1$

6. $y' - y = e^x$

7. $y' = x - y$

8. $4x^3y + x^4y' = \operatorname{sen}^3 x$

9. $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t\dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15-20 Resuelva el problema con valor inicial.

15. $x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2$

16. $t^3 \dfrac{dy}{dt} + 3t^2 y = \cos t, \quad y(\pi) = 0$

17. $t \dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \quad t > 0, \quad u(2) = 4$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1) \dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21-22 Resuelva la ecuación diferencial y utilice una calculadora o computadora para graficar varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía C?

21. $xy' + 2y = e^x$ **22.** $xy' = x^2 + 2y$

23. Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, demuestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24-25 Use el método del ejercicio 23 para resolver la ecuación diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$ **25.** $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. Resuelva la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 12x^2$ haciendo la sustitución $u = y'$.

27. En el circuito mostrado en la figura 4, una batería suministra un voltaje de 40 V, la inductancia es 2 H, la resistencia es 10 Ω e $I(0) = 0$.
a) Encuentre $I(t)$.
b) Determine la corriente después de 0.1 s.

28. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, la inductancia es 1 H, la resistencia es 20 Ω e $I(0) = 1$ A.
a) Encuentre $I(t)$.
b) Determine la corriente después de 0.1 s.
c) Use un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de la función corriente.

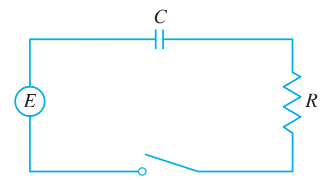
29. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con capacitancia C farads (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), así que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$ (véase el ejemplo 3 en la sección 3.7), de este modo se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, una batería de un voltaje constante de 60 V y la carga inicial es $Q(0) = 0$ C. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.



30. En el circuito del ejercicio 29, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

31. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función de tiempo de entrenamiento t. La gráfica de P se llama *curva de aprendizaje*. En el ejercicio 15 de la sección 9.1 se propuso la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como un modelo razonable para el aprendizaje, donde k es una constante positiva. Resuélvala como una ecuación diferencial lineal y use su solución para graficar la curva de aprendizaje.

32. Se contrató a dos nuevos trabajadores para una línea de ensamble. Jaime procesó 25 unidades durante la primera hora y 45 unidades durante la segunda hora. Marco procesó 35 unidades durante la primera hora y 50 unidades durante la segunda hora. Por medio del modelo del ejercicio 31, y suponiendo que $P(0) = 0$, estime el número máximo de unidades por hora que cada trabajador es capaz de procesar.

33. En la sección 9.3 se examinaron problemas de mezclas en los que el volumen de líquido permaneció constante y se vio que tales problemas dan lugar a ecuaciones separables. (Véase el ejemplo 6 de esa sección.) Si las relaciones de flujo hacia dentro y hacia fuera del sistema son diferentes, entonces el volumen no es constante y la ecuación diferencial resultante es lineal pero no separable.

Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, demuestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

34. Un tanque con una capacidad de 400 L se llena con una mezcla de agua y cloro con una concentración de 0.05 g de cloro por litro. A fin de reducir la concentración de cloro, se bombea agua nueva hacia el recipiente a razón de 4 L/s. La mezcla se mantiene agitada y se bombea hacia afuera a razón de 10 L/s. Encuentre la cantidad de cloro en el recipiente como una función del tiempo.

35. Un objeto con masa m se deja caer desde el reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, entonces la rapidez es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza hacia abajo sobre el objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva, y la segunda ley de Newton da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

a) Resuélvala como una ecuación lineal para demostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

b) ¿Cuál es la velocidad límite?

c) Encuentre la distancia que ha recorrido el objeto después de t segundos.

36. Si se ignora la resistencia del aire, se puede concluir que los objetos más pesados no caen más rápido que los objetos ligeros. Pero si se toma en cuenta la resistencia del aire, la conclusión cambia. Use la expresión para la velocidad de un objeto que cae en el ejercicio 35a) para hallar dv/dm y demuestre que los objetos más pesados *caen* más rápido que los más ligeros.

37. a) Demuestre que la sustitución $z = 1/P$ transforma la ecuación diferencial logística $P' = kP(1 - P/M)$ en la ecuación diferencial lineal

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

b) Resuelva la ecuación diferencial lineal del inciso a) para obtener una expresión para $P(t)$. Compárela con la cuación 9.4.7.

38. Para considerar la variación estacional en la ecuación diferencial logística, tenemos que hacer que k y M sean funciones de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{M(t)}\right)$$

a) verifique que la sustitución $z = 1/P$ transforma esta ecuación en la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dt} + k(t)z = \frac{k(t)}{M(t)}$$

b) Escriba una expresión para la solución de la ecuación lineal del inciso a) y utilícela para demostrar que si la capacidad de carga M es constante, entonces

$$P(t) = \frac{M}{1 + CMe^{-\int k(t)\,dt}}$$

Deduzca que si $\int_0^\infty k(t)\,dt = \infty$, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$. [Esto es cierto si $k(t) = k_0 + a\cos bt$ con $k_0 > 0$, lo cual describe una tasa de crecimiento intrínseco con una variación estacional periódica.]

c) Si k es constante pero M varía, demuestre que

$$z(t) = e^{-kt}\int_0^t \frac{ke^{ks}}{M(s)}\,ds + Ce^{-kt}$$

y utilice la regla de l'Hospital para deducir que si $M(t)$ tiene un límite cuando $t \to \infty$, entonces $P(t)$ tiene el mismo límite.

9.6 Sistemas depredador-presa

Se ha observado una variedad de modelos para el crecimiento de una sola especie que vive sola en un ambiente. En esta sección se consideran modelos más reales que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Se verá que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales vinculadas.

Primero consideramos la situación en que una especie, llamada *presa*, tiene un suministro amplio de alimento y la segunda especie, llamada *depredador*, se alimenta de la presa. Ejemplos de presas y depredadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, pulgones y mariquitas y bacterias y amibas. El modelo tendrá dos variables dependientes, y ambas son funciones del tiempo. Sea $R(t)$ el número de presas (con R que representa conejos) y $W(t)$ el número de depredadores (con W para lobos) en el tiempo t.

En ausencia de depredadores, el suministro amplio de alimento apoyaría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de la presa, se supone que la población de depredadores disminuiría con una rapidez proporcional a sí misma, es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Sin embargo, con ambas especies presentes, se supone que la causa principal de muerte entre la presa que está siendo comida por un depredador y los ritmos de natalidad y supervivencia de los depredadores depende de su suministro de alimento variable, es decir, la presa. Se supone también que las dos especies se encuentran entre sí con una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y, por tanto, es proporcional al producto RW. (Mientras mayor sea la cantidad de cualquier población, es más probable que haya mayor número de encuentros.) Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones, es como sigue:

W representa el depredador.
R representa la presa.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Observe que el término $-aRW$ disminuye la rapidez de crecimiento natural de la presa y el término bRW incrementa la rapidez de crecimiento natural de los depredadores.

El matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuso las ecuaciones de Lotka-Volterra como un modelo para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces en el mar Adriático.

Las ecuaciones en $\boxed{1}$ se conocen como **ecuaciones depredador-presa**, o **ecuaciones de Lotka-Volterra**. Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describe las poblaciones de presa y depredador como funciones del tiempo. Ya que el sistema está acoplado (R y W aparecen en ambas ecuaciones), no se puede resolver una ecuación y luego la otra; se tienen que resolver en forma simultánea. Desafortunadamente, por lo general es imposible hallar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t. Sin embargo, se pueden emplear métodos gráficos para analizar las ecuaciones.

V EJEMPLO 1 Suponga que las poblaciones de conejos y lobos se describen mediante las ecuaciones de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$. El tiempo t se mide en meses.

a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.

b) Use el sistema de ecuaciones diferenciales con el fin de hallar una expresión para dW/dR.

c) Dibuje un campo direccional para la ecuación diferencial resultante en el plano RW. Después use ese campo direccional para hallar algunas curvas solución.

d) Suponga que, en algún punto del tiempo, hay 1000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva solución correspondiente y empléela para describir los cambios en ambos niveles de población.

e) Use el inciso d) para bosquejar R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W serán constantes si ambas derivadas son 0, es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Una solución está dada por $R = 0$ y $W = 0$. (Esto tiene sentido: si no hay conejos o lobos, las poblaciones no se incrementan.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

Así que las poblaciones de equilibrio constan de 80 lobos y 1000 conejos. Esto significa que 1000 conejos son suficientes para soportar una población constante de 80 lobos. No hay ni muchos lobos (lo cual daría como resultado menos conejos) ni pocos lobos (lo que produciría más conejos).

b) Usamos la regla de la cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

por consiguiente,
$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

c) Si se considera a W como una función de R, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Dibujamos el campo direccional para esta ecuación diferencial en la figura 1 y la empleamos para bosquejar varias curvas solución en la figura 2. Si nos movemos a lo largo de una curva solución, se observa cómo cambia la relación entre R y W conforme pasa el tiempo. Observe que al parecer las curvas están cercanas en el sentido de que si se viaja a lo largo de una curva, siempre se vuelve al mismo punto. Observe también que el punto (1000, 80) está dentro de todas las curvas solución. Ese punto se llama *punto de equilibrio* porque corresponde a la solución de equilibrio $R = 1000$, $W = 80$.

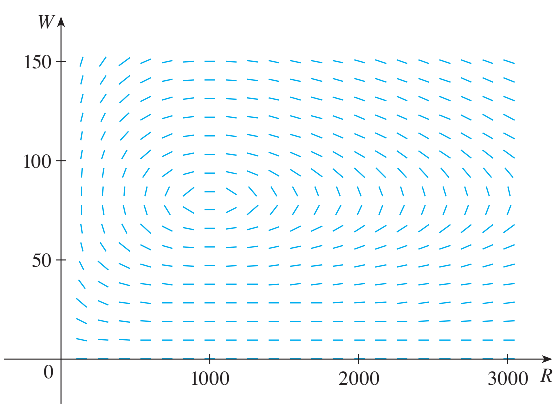


FIGURA 1 Campo direccional para el sistema depredador-presa

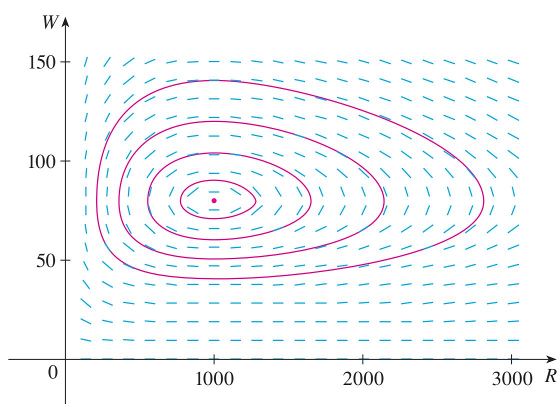


FIGURA 2 Retrato de fase del sistema

Cuando se representan soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como en la figura 2, nos referimos al plano RW como el **plano fase**, y llamamos **trayectorias de fase** a las curvas solución. Así, una trayectoria de fase es una que se traza mediante las soluciones (R, W) conforme pasa el tiempo. Un **retrato de fase** consta de puntos de equilibrio y trayectorias de fase representativas, como se muestra en la figura 2.

d) Empezar con 1000 conejos y 40 lobos corresponde a trazar la curva solución por el punto $P_0(1000, 40)$. En la figura 3 se muestra esta trayectoria de fase sin el campo direccional. Si se empieza en el punto P_0 en el tiempo $t = 0$ y se incrementa t, ¿se va en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario alrededor de la trayectoria fase? Si se escribe $R = 1000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Puesto que $dR/dt > 0$, se concluye que R es creciente en P_0 y, por tanto, se va en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria de fase.

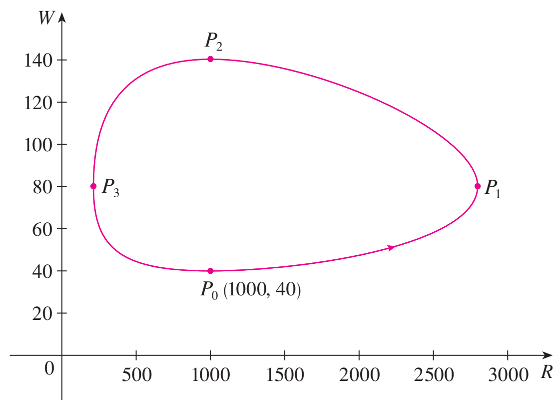


FIGURA 3
Trayectoria de fase por (1000, 40)

Se ve que en P_0 no hay suficientes lobos para mantener un equilibrio entre las poblaciones, así que se incrementa la población de conejos. Eso da como resultado más lobos y, en algún momento, hay tantos lobos que los conejos tienen dificultades para evitarlos. Así, el número de conejos comienza a disminuir (en P_1, donde se estima que R llega a su población máxima de casi 2 800). Esto significa que en algún tiempo posterior la población de lobos comienza a bajar (en P_2, donde $R = 1000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos, así que su población comienza a crecer después (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Como consecuencia, la población de lobos finalmente comienza a crecer también. Esto sucede cuando las poblaciones vuelven a sus valores iniciales de $R = 1000$ y $W = 40$, y el ciclo completo comienza de nuevo.

e) De la descripción del inciso d) de cómo aumentan y disminuyen las poblaciones de conejos y lobos, se pueden bosquejar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 en la figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Entonces se pueden bosquejar las gráficas de R y W como en la figura 4.

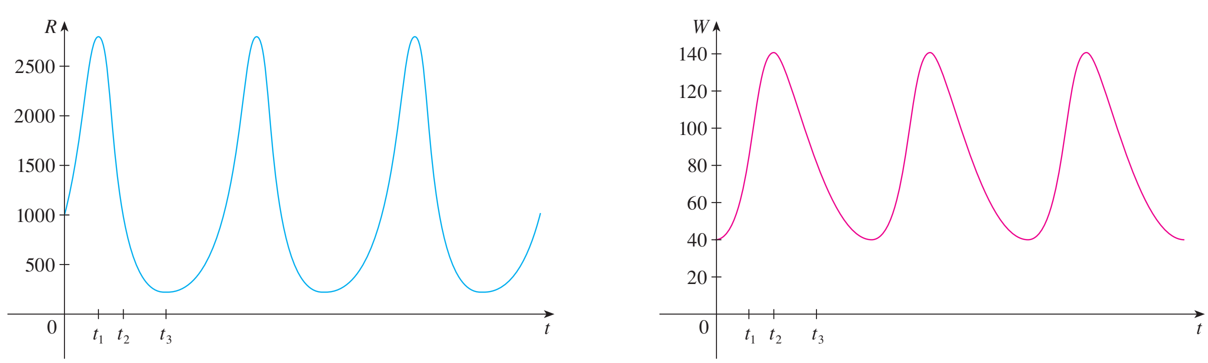


FIGURA 4 Gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo

TEC En Module 9.6 se pueden cambiar los coeficientes en las ecuaciones Lotka-Volterra y observar los cambios en la trayectoria de fase y las gráficas de población de conejos y lobos.

A fin de facilitar la comparación de las gráficas, se trazan en los mismos ejes, pero con escalas distintas para R y W, como en la figura 5. Observe que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas cerca de un cuarto de ciclo antes que los lobos.

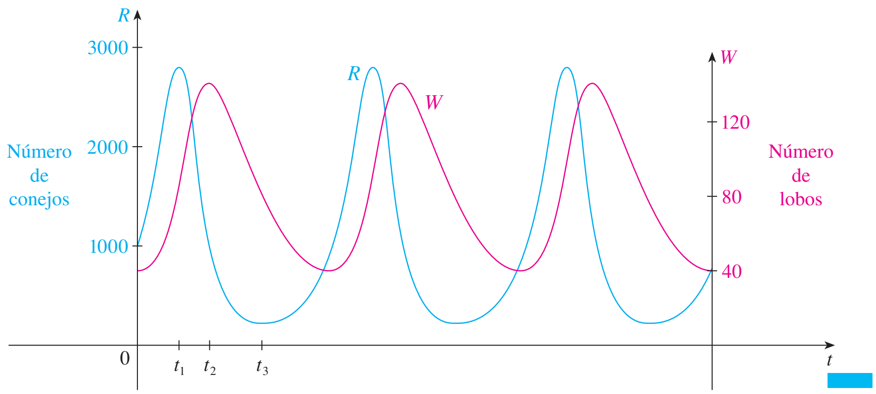


FIGURA 5
Comparación de poblaciones de conejos y lobos

Una parte importante del proceso de modelado, como se analizó en la sección 1.2, es interpretar las conclusiones matemáticas como predicciones del mundo real y probar las predicciones contra datos reales. La *Hudson's Bay Company*, que comenzó a comercializar pieles de animales en Canadá en 1670, ha mantenido registros que datan de la década de 1840. En la figura 6 se muestran las gráficas del número de pieles de la liebre americana y su depredador, el lince de Canadá, comercializadas por la compañía durante un periodo de 90 años. Se puede ver que las oscilaciones acopladas en las poblaciones de liebres y linces predichas por el modelo de Lotka-Volterra ocurren en realidad, y el periodo de estos ciclos es aproximadamente 10 años.

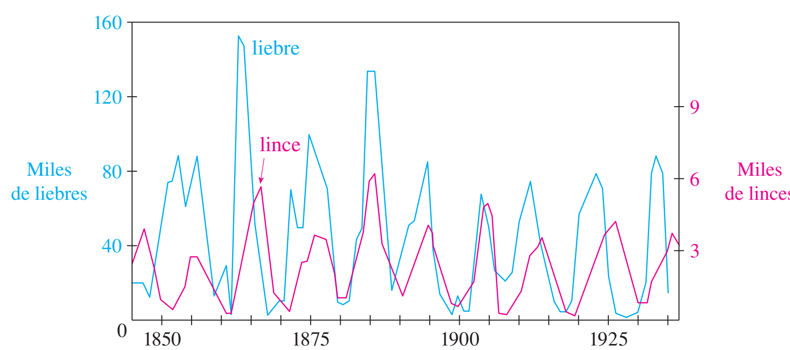


FIGURA 6
Abundancia relativa de liebres y linces de los registros de la *Hudson's Bay Company*

Aunque el modelo relativamente simple de Lotka-Volterra ha tenido cierto éxito en explicar y predecir poblaciones acopladas, se han propuesto modelos más complejos. Una manera de modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer que, en ausencia de depredadores, la presa crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de carga M. Después las ecuaciones de Lotka-Volterra $\boxed{1}$ se reemplazan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{M}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Este modelo se investiga en los ejercicios 11 y 12.

Se han propuesto modelos para describir y predecir niveles de población de dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo. Esta clase de modelos se explora en los ejercicios 2-4.

9.6 Ejercicios

1. Para cada sistema depredador-presa, determine cuál de las variables, x o y, representa la población de presas y cuál representa la población de depredadores. ¿El crecimiento de la presa está restringido sólo por los depredadores o también por otros factores? ¿Los depredadores se alimentan sólo de la presa o tienen fuentes de alimento adicionales? Explique.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$

2. Cada sistema de ecuaciones diferenciales se modela para dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo (plantas que florecen e insectos polinizadores, por ejemplo). Decida si cada sistema describe la competencia o la cooperación y explique por qué es un modelo razonable. (Pregúntese qué efecto tiene en una especie un incremento en la rapidez de crecimiento de la otra.)

a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$

3. El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x - 0.004x^2 - 0.001xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.4y - 0.001y^2 - 0.002xy$$

es un modelo para la población de dos especies.

a) ¿El modelo describe cooperación o competencia, o una relación depredador-presa?

b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

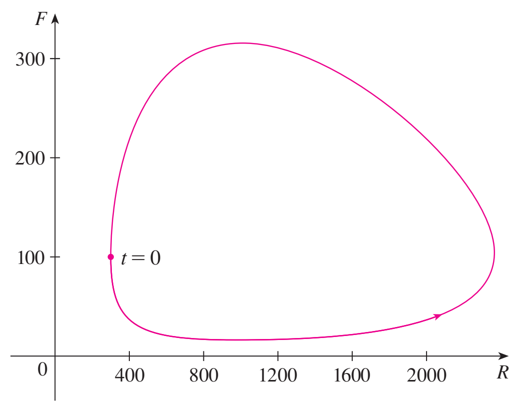
4. Moscas, ranas y cocodrilos coexisten en un ambiente. Para sobrevivir, las ranas comen moscas y los cocodrilos necesitan comer ranas. En ausencia de ranas, la población de moscas crecerá exponencialmente y la población de cocodrilos caerá exponencialmente. En ausencia de cocodrilos y moscas, la población de ranas decaerá exponencialmente. Si $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ representan las poblaciones de estas tres especies en el tiempo t, escriba un sistema de ecuaciones diferenciales como modelo para la evolución de ellas. Si las constantes en su ecuación son todas positivas, explique por qué ha usado signos más o menos.

5-6 Se muestra una trayectoria de fase para la población de conejos (R) y zorros (F).

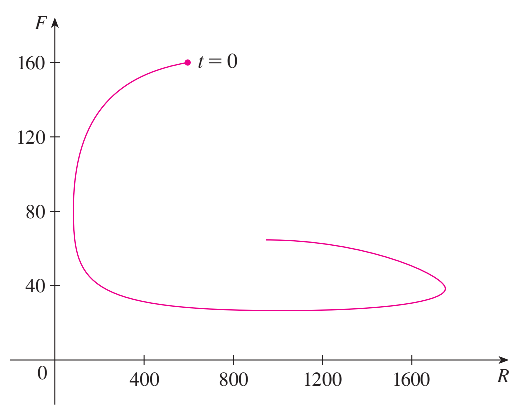
a) Describa cómo cambia cada población a medida que pasa el tiempo.

b) Use su descripción para dibujar un esquema aproximado de las gráficas de R y F como funciones del tiempo.

5.

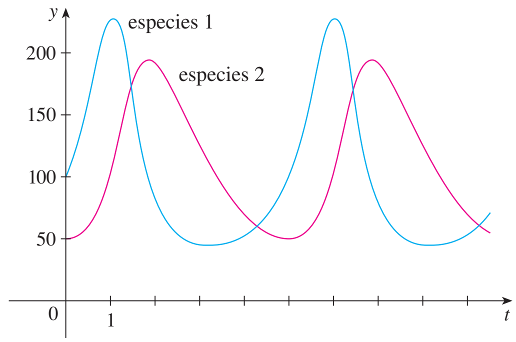


6.

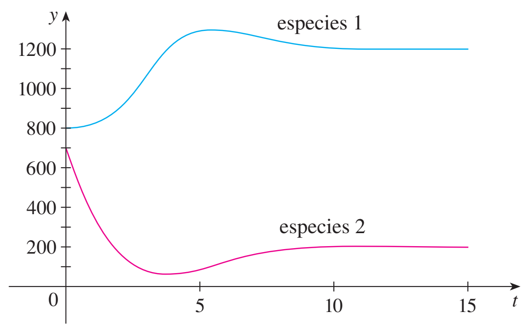


7-8 Se muestran gráficas de población de dos especies. Úselas para trazar la trayectoria de fase correspondiente.

7.



8.



9. En el ejemplo 1b), demostramos que las poblaciones de conejos y de lobos satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Resuelva esta ecuación diferencial separable para demostrar que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

donde C es una constante.

Es imposible resolver esta ecuación para W como función explícita de R (o viceversa). Si cuenta con un SAC que trace gráficas de curva definidas implícitamente, use esta ecuación y su dispositivo para dibujar la curva solución que pasa por el punto (1000, 40) y compárela con la figura 3.

10. Las ecuaciones modelan las poblaciones de pulgones y de mariquitas

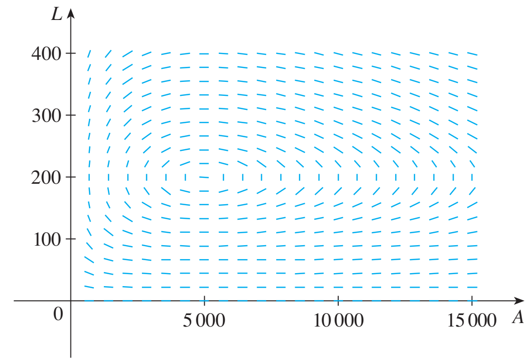
$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

a) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique sus significados.

b) Halle una expresión para dL/dA.

c) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial obtenida en el inciso b). Úselo para trazar un retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?



d) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y empléela para describir cómo cambian ambas poblaciones.

e) Use el inciso d) para construir bosquejos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas entre sí?

11. En el ejemplo 1 se emplearon las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de conejos y lobos. Modifique las ecuaciones como sigue:

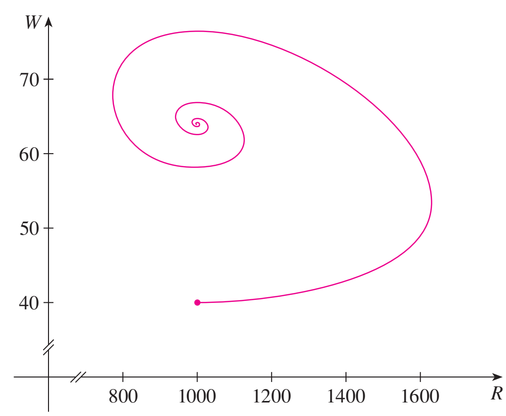
$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de conejos en ausencia de lobos?

b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su significado.

c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que empieza en el punto (1000, 40). Describa qué sucede finalmente con las poblaciones de conejos y lobos.



d) Bosqueje las gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo.